Università degli Studi di Roma “La Sapienza”
Anno Accademico 2001-2002

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Tesi di Laurea
in
Matematica

Equazioni Ellittiche con Termine a Crescita Naturale nel Gradiente e Dati Misura

Relatore:
Prof. Luigi Orsina

Laureando:
Tommaso Leonori
Matricola: 11112614

Indice

Introduzione

Argomento di questa tesi sono alcuni tipi di equazioni ellittiche con dati misura.
Il problema affrontato si presenta così nella sua forma più generale:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u)) + g(x,u,\nabla u) = \mu & \text{in } \Omega \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases},$$

dove le funzioni $a(x,s,\xi)$ e $g(x,s,\xi)$ sono funzioni di Caratheodory sulle quali vengono fatte opportune ipotesi nel corso della tesi, mentre $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, con $N \geq 2$, è un aperto limitato e μ una misura regolare a variazione totale limitata.
Per capire meglio di che problema si tratti, in questa introduzione faremo riferimento al seguente modello di equazione:

$$\begin{cases} -\triangle u + h(u)|\nabla u|^2 = \mu & \text{in } \Omega \\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega & ; \end{cases} \tag{1}$$

cerchiamo quindi una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che $h(u)|\nabla u|^2 \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega h(u)|\nabla u|^2\varphi = \int_\Omega \varphi d\mu \qquad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),$$

con $h(s)$ continua e tale che $h(s)s \geq 0, \forall s \in \mathbf{R}$.
Per poter studiare la (1), nel primo capitolo, dopo aver visto alcuni risultati fondamentali di analisi reale e funzionale, si mostra, grazie al Teorema di Lax-Milgram, l'esistenza (ed in questo caso anche l'unicità) della soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ dell'equazione

$$-\triangle u = f \qquad f \in H^{-1}(\Omega)\,. \tag{2}$$

Si osserva, inoltre, che u è il minimo del funzionale convesso su $H_0^1(\Omega)$,

$$I(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega fv\,.$$

All'inizio del secondo capitolo consideriamo un altro funzionale su $H_0^1(\Omega)$ nel quale compare, rispetto al caso lineare, una funzione che moltiplica il termine di ordine massimo, cioè:

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega a(x,v)|\nabla v|^2 - \int_\Omega fv\,,$$

con $f \in L^2(\Omega)$ e $a(x,s)$ limitata assieme alla sua derivata $a_s(x,s)$. Per u, minimo di $J(v)$, scriviamo poi l'equazione di Eulero e scopriamo che u risolve

$$\int_\Omega a(x,u)\nabla u\cdot\nabla\varphi + \frac{1}{2}\int_\Omega a_s(x,u)|\nabla u|^2\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)\,,$$

ovvero è soluzione di:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,u)\nabla u) + \frac{1}{2}a_s(x,u)|\nabla u|^2 = f & \text{in } \Omega \\ \hfill u = 0 \text{ su } \partial\Omega & . \end{cases} \tag{3}$$

Osserviamo che la (1) è più generale della (3) in quanto non pone nessun legame tra le due funzioni $a(x,s)$ e $a_s(x,s)$, cioè corrisponde alla scelta $a(x,s) = 1$ e $a_s(x,s) = 2h(s)$ (ed ovviamente in questo caso $a_s(x,s)$ non è la derivata rispetto alla variabile s di $a(x,s)$), ma che problemi del tipo (1) sono in un certo senso delle generalizzazioni di (2) corrispondenti a piccole modifiche del funzionale $I(v)$.
Sempre nel secondo capitolo affrontiamo il caso in cui, in (1), $\mu \in H^{-1}(\Omega)$. Approssimando il termine di ordine inferiore con una successione limitata, ci si riconduce ad un problema risolubile grazie al Teorema di Leray-Lions ("generalizzazione" del Teorema di Lax-Milgram): a questo punto facciamo vedere che la successione di soluzioni u_n converge verso u in $H_0^1(\Omega)$, soluzione cercata. La regolarità della soluzione u è dunque $H_0^1(\Omega)$ ed inoltre sia $h(u)|\nabla u|^2$ che $u\cdot h(u)|\nabla u|^2$ appartengono a $L^1(\Omega)$. Più sorprendente è, invece, il caso in cui il dato μ viene scelto in $L^1(\Omega)$. Infatti, facendo l'ipotesi aggiuntiva che $h(s)$ non tenda a zero all'infinito, si procede approssimando il dato con una successione di funzioni in $L^2(\Omega)$, per le quali si è già vista l'esistenza di soluzioni, e si dimostra l'esistenza di soluzioni ancora

appartenenti allo spazio $H_0^1(\Omega)$ e l'appartenenza di $h(u)|\nabla u|^2$ a $L^1(\Omega)$. Si noti che il ruolo determinante per la regolarità della soluzione è svolto dall'effetto del termine di ordine inferiore: infatti nel caso $h(s) \equiv 0$, la soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} -\triangle u = f \quad \text{in } \Omega \\ f \in L^1(\Omega) \quad u = 0 \text{ su } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

appartiene solo allo spazio $W_0^{1,q}(\Omega)$, con $q < \frac{N}{N-1}$.
Facendo, quindi, l'ipotesi supplementare che $h(s)$ non sia infinitesima all'infinito e usando le tecniche già viste nei casi $\mu \in L^1(\Omega)$ e $\mu \in H^{-1}(\Omega)$, troviamo una soluzione $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema (1) per tutte le misure che si possono scrivere come somma di una funzione $L^1(\Omega)$ e di un elemento di $H^{-1}(\Omega)$. Ovviamente non tutte le misure sono rappresentabili in questa forma: si pensi che δ_{x_0} (la massa di Dirac concentrata nel punto x_0), non ammette una tale decomposizione. Si introduce, pertanto, il concetto di capacità di un insieme compatto $K \subset \Omega$, al fine di dare una caratterizzazione delle misure regolari che hanno questa forma. Abbiamo dunque la seguente definizione:

$$\text{cap}_2(K,\Omega) = \inf_{\psi\in W}\left\{\int_\Omega |\nabla\psi|^2\right\} \quad \text{dove} \quad W = \{\psi \in C_0^\infty(\Omega) : \psi \geq \chi_K\}\,,$$

con la convenzione di assumere $\inf\{\emptyset\} = +\infty$; successivamente si estende questa definizione agli insiemi aperti e, dunque, ai boreliani. Si osserva poi che la $2-$capacità è una misura esterna ma non una misura, in quanto manca la sub-additività su insiemi disgiunti: infatti la $2-$capacità coincide con la capacità elettrica di un conduttore uniformemente carico e dunque, com'è noto dalla fisica, la capacità elettrica di due condutori posti a poca distanza tra loro è minore della somma delle capacità. Si sono poi sottolineate le seguenti relazioni tra misure regolari e $2-$capacità, in particolare: $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ è assolutamente continua rispetto alla 2-capacità, e scriviamo $\mu_0 \ll \text{cap}_2$, se μ_0 si annulla su tutti gli insiemi di 2-capacità nulla; diciamo che $\lambda \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ è singolare rispetto alla 2-capacità, e scriviamo $\lambda \perp \text{cap}_2$, se λ "vive" su insiemi di 2-capacità nulla. Indichiamo inoltre con

$$\mathcal{M}_0(\Omega) = \{\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega) \,:\, \mu \ll \text{cap}_2\}\,,$$

lo spazio di tutte le misure assolutamente continue rispetto alla 2-capacità e, grazie ad un Teorema dimostrato in [4], vediamo che una misura appartenente a $\mathcal{M}_0(\Omega)$ è decomponibile (non in maniera univoca, poiché $L^1(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega) \neq$

$\emptyset$) come somma di una funzione $L^1(\Omega)$ e di un elemento di $H^{-1}(\Omega)$. Inoltre

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)\, \exists!(\mu_0, \lambda) \text{ con } \mu_0 \in \mathcal{M}_0(\Omega) \text{ e } \lambda \perp \mathrm{cap}_2 \,:\, \mu = \mu_0 + \lambda\,.$$

Pertanto, sostanzialmente, si è dimostrata l'esistenza di una soluzione per l'equazione (1) nel caso in cui il dato $\mu \in \mathcal{M}_0(\Omega)$.
Nel terzo capitolo si affronta il caso in cui la misura $\mu \notin \mathcal{M}_0(\Omega)$; si pensi ad esempio, al problema

$$\begin{cases} -\triangle u + h(u)|\nabla u|^2 = \delta_{x_0} & \text{in } \Omega \\ \hfill u = 0 \text{ su } \partial\Omega & . \end{cases}$$

Tentiamo di risolvere il problema con una tecnica simile a quella usata nel Capitolo 2 e dunque approssimiamo il dato con una successione di funzioni $f_n \subset L^\infty(\Omega)$ limitata in $L^1(\Omega)$; dalle stime a priori si vede che u_n è limitata in $H_0^1(\Omega)$. Ci si trova, allora, di fronte alla difficoltà di riuscire a determinare verso cosa convege (debolmente) la successione u_n: sicuramente il limite u non è soluzione del problema (1), con $\mu = \lambda \perp \mathrm{cap}_2$, poiché altrimenti avremmo:

$$\underbrace{-\triangle u}_{H^{-1}(\Omega)} + \underbrace{h(u)|\nabla u|^2}_{L^1(\Omega)} = \lambda \notin H^{-1}(\Omega) + L^1(\Omega)$$

Allora, dopo aver introdotto delle funzioni ausiliari ($\{\psi_\delta\}$, dette funzioni cut-off), utili nello studio del comportamento delle soluzioni in un intorno del compatto K di 2-capacità nulla su cui è concentrata la misura, consideriamo due successioni di funzioni positive, $f_n^\oplus$ e $f_n^\ominus \subset L^\infty(\Omega)$, approssimanti, rispettivamente, λ^+ e λ^- (dove λ^+ e λ^- indicano la parte positiva e la parte negativa di λ) nella topologia stretta delle misure. In questo modo studiamo il comportamento della successione di soluzioni del problema

$$\begin{cases} -\triangle u_n + h(u_n)|\nabla u_n|^2 = f_n^\oplus - f_n^\ominus = f_n & \text{in } \Omega \\ \hfill u_n = 0 \text{ su } \partial\Omega & . \end{cases}$$

Si dimostra che la successione u_n converge verso zero quasi ovunque e che esiste $k > 0$ tale che la troncata $T_k(u_n)$ converge verso zero fortemente in $H_0^1(\Omega)$. Ovviamente $u \equiv 0$ non è la soluzione dell'equazione (1), ma è soluzione del problema con dato nullo; si giunge, dunque, alla conclusione che non esiste soluzione del problema (1) per misure $\mu \perp \mathrm{cap}_2$. Inoltre enunciamo un Teorema che generalizza il risultato precedente e che ci dà una condizione sulla funzione $g(s)$ per la quale c'è o meno esistenza per misure $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$:

$$\text{se } h(s) \in L^1(\mathbf{R}^+) \Rightarrow \exists u \text{ soluzione debole di (1) } \forall \mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)\,;$$

$$\text{se } h(s) \notin L^1(\mathbf{R}^+) \Rightarrow \exists u \text{ soluzione debole di (1) } \Longleftrightarrow \mu \in \mathcal{M}_0(\Omega)\,.$$

Il risultato di non esistenza di soluzioni nel caso in cui la misura μ sia concentrata in un insieme compatto K di 2-capacità nulla viene confermato, con un approccio completamente diverso, da un lavoro di H. Brezis e L. Nirenberg ([6]) nel quale gli autori, nell'affrontare il problema (1), trovano condizioni su $h(s)$ per cui una soluzione u regolare in $\Omega\backslash K$, è regolare su tutto Ω. In questo caso giocano un ruolo fondamentale le seguenti ipotesi sulla crescita di $h(s)$:

$$\exists \gamma \in \mathbf{R}^+ \,:\, h(s)s \geq \gamma > 1 \quad \text{e} \quad \int^{+\infty} \frac{1}{h(s)} = \infty\,.$$

Deduciamo, dunque, che le singolarità concentrate in insiemi di 2-capacità nulla sono eliminabili.

Nell'ultimo capitolo, invece, si affronta il problema della stabilità della soluzione. Vediamo, infatti, due versioni, prima la più forte e poi la più debole, di un Teorema che generalizza i risultati del terzo capitolo. Usando anche in questo caso una tecnica di approssimazione, si considera una successione di funzioni $f_n \subset L^\infty(\Omega)$ ed un compatto K di 2-capacità nulla, e si chiede che f_n converga verso f in $L^1_{\text{loc}}(\Omega\backslash K)$, ovvero

$$\int_{\Omega\backslash I(K)} |f_n - f| \to 0\,,$$

per ogni intorno $I(K)$ di K. Questa convergenza sottolinea il fatto che ci disinteressiamo di ciò che succede alla successione f_n in un compatto di 2-capacità nulla. Le tesi dei due Teoremi asseriscono che la successione di soluzioni u_n del problema

$$\begin{cases} -\triangle u_n + h(u_n)|\nabla u_n|^2 = f_n & \text{in } \Omega \\ \hfill u_n = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases},$$

converge quasi ovunque verso la soluzione del problema

$$\begin{cases} -\triangle u + h(u)|\nabla u|^2 = f & \text{in } \Omega \\ \hfill u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}.$$

Si può concludere, dunque, che se si perturba il dato, anche in maniera "violenta", solo in un compatto di 2-capacità nulla, la soluzione rimane invariata. Si pensi ad esempio che la successione u_n di soluzioni del problema

$$\begin{cases} -\triangle u + h(u)|\nabla u|^2 = n^{n^{n^{n^{n^{n^n}}}}} \cdot \chi_{B_{\frac{1}{n}}(0)} & \text{in } B_1(0) \\ u = 0 & \text{su } \partial B_1(0) \end{cases}$$

converge verso $u \equiv 0$ quasi ovunque, poiché

$$\chi_{B_{\frac{1}{n}}(0)} \cdot n^{n^{n^{n^{n^{n^n}}}}} \longrightarrow 0 \quad \text{in} \quad L^1_{\text{loc}}(\Omega \backslash K)\,,$$

con la scelta $\Omega = B_1(0)$ e $K = \{0\}$.

Capitolo 1

Definizioni e risultati preliminari

1.1 Misura di Lebesgue

Iniziamo dando la definizione di misura di Lebesgue ed enunciando poi i principali teoremi di convergenza che saranno utilizzati in seguito:

Definizione 1.1 Sia $I \subset \mathbf{R}$ un intervallo limitato $I = (a, b)$. La sua lunghezza $l(I)$ è definita come la differenza tra i due estremi. Se ora consideriamo un sottoinsieme generico $E \subset \mathbf{R}$, definiamo $\mu^*(E)$ la sua misura esterna come

$$\mu^* : \mathcal{P}(\mathbf{R}) \to [0, +\infty] \qquad \mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} l(I_j) \text{ t.c. } E \subset \bigcup_{j \in J} (I_j) \right\},$$

dove $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ indica l'insieme delle parti di $\mathbf{R}$ e inf indica l'estremo inferiore al variare della scelta di $\{I_j\}$ nell'insieme delle famiglie al più numerabili di intervalli aperti. Segue che $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Enunciamo ora alcune proprietà della misura esterna e diamo la definizione di insieme misurabile secondo Lebesgue:

Teorema 1.2 (monotonia) *Siano A e $B \subset \mathbf{R}$ con $A \subset B$, allora $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.*

Dimostrazione. Si veda [5], Teorema 4, pag 364. ■

Teorema 1.3 (regolarità) *Sia* $A \subset \mathbf{R}$ *con* $\mu^*(A) < +\infty$. *Allora*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \{I_j^\varepsilon\}_{j \in J_\varepsilon}\, t.c.\, A \subseteq \mathbf{R} \bigcup_{j \in J_\varepsilon} I_j^\varepsilon \quad e \quad \sum_{j \in J_\varepsilon} l(I_j^\varepsilon) \leq \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Teorema 1.4 *Sia* $I \subset \mathbf{R}$, I *intervallo, allora* $\mu^*(I) = l(I)$.

Dimostrazione. Si veda [12], Proposizione 1, pag 56. ■

Definizione 1.5 Sia $E \subset \mathbf{R}$, E si dice *misurabile secondo Lebesgue* se $\forall A \subset \mathbf{R}$ si ha

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Dove E^c indica l'insieme complementare di E.

Teorema 1.6 (σ -additività) *Sia* $\{E_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ *una famiglia numerabile di insiemi misurabili. Allora* $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_j$ *è misurabile. Se poi* $E_i \cap E_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ *, allora*

$$\mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j).$$

Dimostrazione. Si veda [5], Teorema 7, pag 369. ■

Definizione 1.7 ($\sigma -$ algebra) Definiamo $\sigma - algebra$ una famiglia $\mathcal{S}$ di sottoinsiemi di X che gode delle seguenti proprietà:

1. $X \in \mathcal{S}$;
2. Se $\mathcal{A} \in \mathcal{S}$, allora $\mathcal{A}^c \in \mathcal{S}$
3. Se $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i, \quad con \quad \mathcal{A}_i \in \mathcal{S}\, \forall i \in \mathbf{N}$ allora $\mathcal{A} \in \mathcal{S}$;

Definizione 1.8 Chiamiamo $\mathcal{M} = \{E \subset \mathbf{R}\, t.c.\, E$ è misurabile $\}$. $\mathcal{M}$ è una $\sigma - algebra$.

Definizione 1.9 Definiamo per ogni elemento E della $\sigma - algebra\, \mathcal{M}$, $\mu(E)$ la misura di Lebesgue come $\mu^*(E)$.

Ha senso andare a definire le funzioni misurabili secondo Lebesgue

Definizione 1.10 Sia A un insieme misurabile e sia $f(x)$ una funzione $f : A \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. $f(x)$ si dce misurabile secondo Lebesgue se è misurabile l'insieme

$$\forall a \in \mathbf{R} \quad \{x \in A\, t.c.\, f(x) > a\}. \tag{1.1}$$

Inoltre (1.1) è equivalente ad una qualsiasi delle seguenti condizioni:

1. $\forall a \in \mathbf{R} \quad \{x \in A\, t.c.\, f(x) \geq a\}$
2. $\forall a \in \mathbf{R} \quad \{x \in A\, t.c.\, f(x) < a\}$
3. $\forall a \in \mathbf{R} \quad \{x \in A\, t.c.\, f(x) \leq a\}$

Indicheremo d'ora in poi con $M(\Omega)$ l'insieme dell funzioni misurabili su un alerto Ω limitato.

Proposizione 1.11 *Siano $f(x)\, e\, g(x) \in M(\Omega)$ e $f \cdot g \in M(\Omega)$, allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ anche $\alpha f + \beta g \in M(\Omega)$, inoltre anche $max\{f(x), g(x)\} \in M(\Omega)$.*

Dimostrazione. Si veda [5], Proposizione 6, pag 374. ■

La proposizione precedente ha come conseguenza che $\forall f \in M(\Omega)$, $f^+ = \max\{f(x), 0\} \in M(\Omega)$ e $f^- = \max\{-f(x), 0\} \in M(\Omega)$ e quindi $|f| = f^+ + f^- \in M(\Omega)$.

Definizione 1.12 Sia P una funzione che ad ogni $x \in \mathbf{R}^N$ associa una proposizione $P(x)$, allora si dice che $P(x)$ è vera quasi ovunque (e scriviamo $P(x)$ q.o.) se l'insieme in cui $P(x)$ è falsa ha misura nulla.

Proposizione 1.13 *Siano $f(x)$ e $g(x)$ tali che $f(x) \in M(\Omega)$ e $f(x) = g(x)$ q.o. . Allora $g(x) \in M(\Omega)$.*

Dimostrazione. Si veda [12], proposizione 21, pag 69. ■

Osservazione 1.14 Si può facilmente verificare che la proprietà di essere uguali quasi ovunque è una relazione di equivalenza, che possiamo esplicitare così :

$$f\, \rho\, g \qquad \Leftrightarrow\ f = g\ \ q.o. \tag{1.2}$$

Introduciamo ora l'integrale di Lebesgue: in un primo momento per funzioni semplici per poi estenderlo a funzioni non necessariamente semplici.

Definizione 1.15 Definiamo una funzione semplice una funzione limitata $\varphi(x) \in M(\Omega)$ tale che assume solo un numero finito di valori $\alpha_1, ..., \alpha_n$; allora φ si può scrivere nella seguente forma:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi(A_i)\,,$$

dove $\chi(A_i)$ è la funzione caratteristica di A_i. Per le funzioni seplici $S(\Omega)$ definiamo

$$\int_\Omega \varphi(x) d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i).$$

Definizione 1.16 Chiamiamo

$$\overline{S}(f(x)) = \{\overline{\varphi} : \Omega \to \mathbf{R},\, \overline{\varphi} \text{ semplice e } \overline{\varphi} \geq f(x)\, \forall x \in \Omega\}$$

e

$$\underline{S}(f(x)) = \left\{\underline{\varphi} : \Omega \to \mathbf{R},\, \underline{\varphi}\,\text{semplice e } \underline{\varphi} \leq f(x)\, \forall x \in \Omega\right\}$$

Allora definiamo *l'integrale secondo Lebesgue* :

$$\int_\Omega f(x)dx = \inf\left\{\int_\Omega \overline{\varphi}(x)dx,\, \overline{\varphi}(x) \in \overline{S}(f)\right\} = \sup\left\{\int_\Omega \underline{\varphi}(x)dx,\, \underline{\varphi}(x) \in \underline{S}(f)\right\}.$$

Osservazione 1.17 Grazie all'ipotesi di misurabilità e di limitatezza della funzione si dimostra che la definizione è ben posta, ovvero che

$$\inf\left\{\int_\Omega \overline{\varphi}(x)dx,\, \overline{\varphi}(x) \in \overline{S}(f)\right\} = \sup\left\{\int_\Omega \underline{\varphi}(x)dx,\, \underline{\varphi}(x) \in \underline{S}(f)\right\}.$$

Andiamo ora a definire lo **spazio di Lebesgue** :

Definizione 1.18 Sia ρ la relazione d'equivalenza definita in (1.2) ,allora definiamo

$$L^1(\Omega) = \frac{\left\{f(x)\,\text{misurabili t.c. } \int_\Omega |f(x)|dx < \infty\right\}}{\rho}$$

Enunciamo ora i principali teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale:

Teorema 1.19 (di Beppo Levi) *Consideriamo la successione di funzioni* $f_n(x) : \Omega \to \mathbf{R}$ *positiva tale che* $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbf{N}$ *e* $f_n(x) \to f(x)$ *q.o.. Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

Dimostrazione. Si veda [5], pag 381. ■

Lemma 1.20 (di Fatou) *Sia* $f_n(x)$ *una successione di funzioni tali che* $f_n(x) \geq 0$ *e* $f_n(x) \to f(x)$ *q.o.. Allora*

$$\int_\Omega f(x)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)dx$$

Dimostrazione. Si veda [5], pag 383. ■

Teorema 1.21 (della convergenza dominata) *Sia* $f_n(x)$ *una successione di funzioni tale che* $f_n(x) \to f(x)$ *q.o. e* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *q.o. con* $g(x) \in L^1(\Omega)$. *Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

Dimostrazione. Si veda [5],Teorema 13, pag 385. ■

Definizione 1.22 Sia $f_n(x)$ una successione di funzioni definita su Ω. Diciamo che $f_n(x)$ converge in misura verso $f(x)$ se

$$\text{mis}\,\{x \in \Omega\, t.c.\, |f_n(x) - f(x)| > \lambda\} \to 0 \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}^+.$$

Proposizione 1.23 *Sia*

$$d(f,g) = \int_\Omega \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} dx \quad \forall f, g \in M(\Omega)\,.$$

Allora $f_n(x) \to f(x)$ *in misura se e solo se* $d\left(f_n(x), f(x)\right) \to 0$

Vediamo ora qual'è il legame tra convergenza in misura e convergenza quasi ovunque.

Teorema 1.24 *Sia $f_n : \Omega \to \mathbf{R}$ una successione di funzioni tale che $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ in misura, allora esiste una sottosuccessione $f_{n_k}(x)$ tale che $f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.o. in Ω. Se inoltre $\mu(\Omega) < +\infty$ allora la convergenza q.o. implica la convergenza in misura.*

Dimostrazione. Si veda [5], Teorema 15, pag 387. ∎

Teorema 1.25 (di Vitali) *Sia $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ q.o., allora*

$$\int_\Omega |f_n(x) - f(x)| dx \to 0$$

se e solo se

$$\forall \varepsilon\, \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad mis(E) < \delta_\varepsilon \Rightarrow \textstyle\int_E |f_n(x)| dx < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbf{N} \qquad \textit{(equintegrabilità)}$$

1.2 Spazi funzionali

A partire dalla definizione di $L^1(\Omega)$, possiamo definire per $p \in [1, +\infty]$ gli spazi $L^p(\Omega)$:

Definizione 1.26 Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, definiamo per $1 \le p < +\infty$:

$$L^p(\Omega) = \frac{\left\{ f(x) \text{ misurabili t.c. } \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}}{\rho},$$

dove ρ è la relazione d'equivalenza definita in (1.2). Inoltre chiamiamo

$$L^\infty(\Omega) = \{ f(x) \text{ misurabili per le quali } \exists c > 0 \text{ tale che } |f(x)| \le c \text{ q.o. in } \Omega \}.$$

$L^p(\Omega)$, per $p \in [1, +\infty[$ è uno spazio di Banach se si considera la norma

$$\|f(x)\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} ;$$

per $L^\infty(\Omega)$ dobbiamo considerare a norma

$$\|f(x)\|_\infty = \inf\{ c \in \mathbf{R}^+ \, t.c. \, |f(x)| \le c \, q.o. \text{ in } \Omega \}.$$

Inoltre $L^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert la cui norma è indotta da prodotto scalare

$$(f(x), g(x))_{L^2} = \int_\Omega f(x) \cdot g(x) dx \, .$$

Proposizione 1.27 (disuguaglianza di Hölder) *Siano $f(x)$ e $g(x)$ tali che $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)\, \forall p > 1$. Allora*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_\Omega g(x)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} = \|f(x)\|_{L^p} \cdot \|g(x)\|_{L^{p'}} \, ,$$

dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, e $p^{'}$ è detto coniugato di p.

Dimostrazione. Si veda [5], Teorema IV.6, pag 87 . ■

Proposizione 1.28 (disuguaglianza di Young) *Siano $a, b \in \mathbf{R}$ e siano $p > 1$ e p' il suo coniugato. Allora*

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^{p'}}{p'} \, .$$

Osservazione 1.29 Si osservi che nel nostro caso, cioè nel caso in cui le funzioni siano definite su un insieme di misura finita, la disuguaglianza di Hölder ci permette di dimostrare che $\forall p > r \in]1, +\infty[$ si ha:

$$L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^r(\Omega) \subset L^1(\Omega) \, .$$

Teorema 1.30 (di rappresentazione del duale) *Sia F un funzionale lineare continuo su $L^p(\Omega)$ per $1 < p < +\infty$, allora*

$$\exists g(x) \in L^{p'}(\Omega) \, t.c. \quad F(u) = \int_\Omega u(x) \cdot g(x) dx \quad \forall u \in L^p(\Omega)$$

dove p' è il coniugato di p. Quindi $\left(L^p(\Omega)\right)^{'} = L^{p'}(\Omega)$.

Dimostrazione. Si veda [5], Teorema IV.11, pag 95. ■

Dal Teorema precedente si deduce che se $1 < p < +\infty$ lo spazio $L^p(\Omega)$ è uno spazio di Banach riflessivo.

Osservazione 1.31 Per $L^1(\Omega)$ vale il Teorema precedente con la convensione di assumere ∞ come coniugato di 1; per quanto riguarda lo spazio duale di $L^\infty(\Omega)$ sappiamo che $(L^\infty(\Omega))' \supset L^1(\Omega)$. Inoltre se $1 < p < +\infty$, $C_0^\infty(\Omega)$ è denso il $L^p(\Omega)$ e se $1 \leq p < +\infty$, $L^p(\Omega)$ è anche separabile.

Definizione 1.32 (spazi di Marcinkiewicz) Sia f(x) una funzione misurabile in un aperto limitato $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, f(x) appartiene allo spazio di Marcinkiewicz $M^p(\Omega)$ se

$$\exists c \in \mathbf{R} \quad t.c. \quad \text{mis}\{x \in \Omega\, t.c. |f(x)| > t\} \leq \frac{c}{t^p.}$$

Teorema 1.33 *Sia $f(x) \in L^p(\Omega) \quad \forall p > 1$ allora $f(x) \in M^p(\Omega)$.*

Teorema 1.34 *Sia $f(x) \in M^p(\Omega) \quad \forall p > 1$, allora $\forall \varepsilon \in]0, p-1[\quad f(x) \in L^{p-\varepsilon}(\Omega)$.*

Diamo ora la definizione di spazio di Sobolev: per farlo introduciamo prima il concetto di derivata debole.

Definizione 1.35 Sia $\Omega \subset \mathbf{R^N}$ e sia $f(x) \in L^p(\Omega)$. Diciamo che f(x) ammette derivata debole $g(x) \in L^p(\Omega)$ (e scriveremo $f'(x) = g(x)$) se

$$\int_\Omega f(x) \cdot \varphi'(x) dx = -\int_\Omega g(x) \cdot \varphi(x) dx \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega).$$

Osservazione 1.36 Nel caso in cui f(x) sia derivabile la derivata debole e quella classica coincidono.

Definizione 1.37 Lo spazio

$$W^{1,p}(\Omega) = \{f(x) \in L^p(\Omega) \text{ t.c. } f'(x) \in L^p(\Omega)\}$$

viene detto Spazio di Sobolev ed è uno spazio di Banach se si considera la norma

$$\|f(x)\|_{W^{1,p}} = \|f(x)\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla f(x)\|_{L^p(\Omega)}.$$

Definizione 1.38 Si definisce $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}}}$. Inoltre chiameremo $W^{1,2}(\Omega)$ e $W_0^{1,2}(\Omega)$ rispettivamente $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ che sono due spazi di Hilbert con prodotto scalare

$$(f(x), g(x))_{H^1} = \int_\Omega f(x) \cdot g(x) dx + \int_\Omega \nabla f(x) \cdot \nabla g(x) dx$$

Ricordiamo che per funzioni appartenenti a $W^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$ valgono i seguenti risultati.

Teorema 1.39 (disuguaglianza di Sobolev) *Sia* $1 < p \leq N$, *allora*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \quad \textit{con immersione continua, essendo } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} + \frac{1}{N}.$$

Inoltre $\exists$ *c=c(N,p) tale che* $\|u\|_{L^{p^*}} \leq c \cdot \|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Dimostrazione. Si veda [5], Teorema IX.9, pag 258. ■

Teorema 1.40 (disuguaglianza di Poincaré) *Sia* $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ *limitato. Allora* $\exists c = c\,(\Omega, p)$ *tale che* $\forall p \in [1, +\infty[$,

$$\|u\|_{L^p} \leq c\|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Dimostrazione. Si veda [5], Teorema IX.19, pag 277. ■

Osservazione 1.41 Si ha che $\|\nabla u(x)\|_{L^p}$ è una norma su $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente alla norma $\|u(x)\|_{W^{1,p}}$. Questo implica anche che in $H_0^1(\Omega)$ possiamo considerare come prodotto scalare

$$(f(x), g(x))_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla f(x) \cdot \nabla g(x) dx\,,$$

invece di quello standard di $H^1(\Omega)$.

Teorema 1.42 (di Rellich-Kondrachov) *Supponiamo che* Ω *sia un aperto limitato di classe* C^1. *Si ha*

1. *Se* $p < N$, *allora* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q \qquad \forall q \in [1, p^*[\,;$
2. *Se* $p = N$ *allora* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q \qquad \forall q \in [1, \infty[\,;$
3. *Se* $p > N$ *allora* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})\,.$

Tutte le immersioni sono compatte e continuano a valere anche per $W_0^{1,p}(\Omega)$ *senza ipotesi su* Ω.

Dimostrazione. Si veda [5], Teorema IX.16, pag 270. ∎

Possiamo ora enunciare il Teorema che caratterizza il duale di uno spazio di Sobolev, in maniera analoga a quella già vista per gli spazi di Lebesgue.

Teorema 1.43 (di rappresentazione del duale) *$\forall F$ funzionale lineare continuo su $W_0^{1,p}(\Omega)$*

$$\exists! g_1 \, e \, g_2 \in \left(L^{p'}(\Omega)\right)^N \quad t.c.$$

$$\langle F, u\rangle = \int_\Omega u(x)g_1(x) + \int_\Omega \nabla u(x) \cdot g_2(x)dx \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Chiameremo $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)' = W^{-1,p'}(\Omega)$

Dimostrazione. Si veda [5], Teorema IX.20, pag 278. ∎

Enunciamo ora alcuni teoremi di convergenza che useremo in seguito.

Definizione 1.44 Diciamo che $f_(x)$ converge a $f(x)$ in $L^p(\Omega)$ se

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{L^p} \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Definizione 1.45 Sia $\{\mu_n\}$ una successione di misure in $M(\Omega)$. Diremo che μ_n converge $*$-debolmente (cioè nella topologia $*$-debole delle misure) a $\mu \in M(\Omega)$ se

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \varphi(x)d\mu_n = \int_\Omega \varphi(x)d\mu \qquad \forall \varphi \in C^0(\Omega)\,.$$

Definizione 1.46 Sia $\{\mu_n\}$ una successione di misure in $M(\Omega)$. Diremo che μ_n converge a $\mu \in M(\Omega)$ nella topologia stretta delle misure se

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \varphi(x)d\mu_n = \int_\Omega \varphi(x)d\mu \qquad \forall \varphi \in C^0(\overline{\Omega})\,.$$

I seguenti teoremi sono delle generalizzazioni in ambito $L^p(\Omega)$ del Teorema 1.21 e del Teorema 1.25 :

Teorema 1.47 (di Lebesgue) *Sia $f_n(x)$ una successione di funzioni tale che $f_n(x) \to f(x)$ q.o. e $|f_n(x)| \le g(x)$ con $g(x) \in L^p(\Omega)$. Allora*

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \text{ in } L^p(\Omega).$$

Dimostrazione. Si veda [5], Teorema IV.2, pag 84. ∎

Teorema 1.48 (di Vitali) *Sia* $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *q.o., allora*

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \ \ in \ \ L^p(\Omega)$$

se e solo se

$$\forall \varepsilon \, \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad mis(E) < \delta_\varepsilon \; \Rightarrow \; \textstyle\int_E |f_n(x)| dx < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Grazie ai Teoremi di Vitali e di Lebesgue possiamo enunciare il seguente risultato:

Teorema 1.49 (di Lebesgue generalizzato) *Sia* $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *q.o., con* $|f_n(x)| \leq g_n(x)$, $g_n(x) \xrightarrow{L^p} g(x)$. *Allora* $\displaystyle\int_\Omega |f_n(x) - f(x)|^p dx \to 0$.

Ricordiamo inoltre la definizione di convergenza debole in un qualsiasi spazio di Banach X:

Definizione 1.50 Consideriamo la successione $\{x_n\} \in X$. Diciamo che x_n converge debolmente a $x \in X$ (e scriviamo $x_n \rightharpoonup x$) se $\forall y \in X'$ si ha che la succesione di numeri reali

$$\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle.$$

Possiamo allora enunciare il seguente Teorema che ci dà una condizione per la convergenza debole:

Teorema 1.51 *Sia* X *uno spazio di Banach riflessivo, allora da una successione limitata* $\{x_n\} \in X$ *si può estrarre una sottosuccessione debolmente convergente ad* $x \in X$.

Dimostrazione. Si veda [5], Teorema III.27, pag 76. ∎

Data la caratterizzazione che abbiamo dato dello spazio duale degli spazi $L^p(\Omega)$, se consideriamo $\{f_n\} \in L^p(\Omega)$ allora

$$f_n \rightharpoonup \ \mathrm{in} L^p(\Omega)$$

se

$$\int_\Omega f_n(x) \cdot g(x) \to \int_\Omega f(x) \cdot g(x) \quad \forall g \in L^{p'}(\Omega).$$

Definizione 1.52 Diremo che $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ se $u \in L^p(K)$, $\forall K$ compatto tale che $K \subset \Omega$.

Data la definizione di spazio $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, vediamo la topologia associata:

Definizione 1.53 Sia u_n una successione in $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$; diciamo che $u_n \to u$ in $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ se

$$\int_K |u_n - u|^p \to 0\,, \quad \forall K \text{ compatto } K \subset \Omega\,.$$

1.3 Elementi di teoria della misura

Nel primo paragrafo abbiaamo ricordato cos'è la misura di Lebesgue, descriviamo ora più in generale la teoria della misura astratta: iniziamo enunciando una proprietà delle $\sigma - algebre$, introdotte precedentemente.

Teorema 1.54 *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di X, allora esiste una $\sigma - algebra\,\mathcal{M}^*$ che è la più ù piccola delle $\sigma - algebre$ contenenti $\mathcal{F}$.*

Dimostrazione. Si veda [13], Teorema 1.10 , pag 24. ∎

Il Teorema precedente ci permette di definire gli *insiemi Boreliani*.

Definizione 1.55 Sia X uno spazio topologico, chiamiamo $\mathcal{B}$ la più piccola $\sigma - algebra$ contenente tutti gli aperti di X. Gli elementi di $\mathcal{B}$ si chiamano gli insiemi di $Borel$ di X. L'esistenza di $\mathcal{B}$ è assicurata dal Teorema precedente.

Diamo ora la definizione di misura positiva.

Definizione 1.56 Chiamiamo una *misura positiva una funzione μ definita su una $\sigma - algebra\,\mathcal{M}$ che sia numerabilmente additiva e a valori in* $[0, +\infty]$.

Ricordiamo che numerabilmente additiva vuol dire che se $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ è una famiglia di elementi di $\mathcal{M}$ tale che $\mathcal{A}_i \bigcap \mathcal{A}_j = \emptyset \;\; \forall i \neq j$, allora

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\mathcal{A}_i).$$

Teorema 1.57 *Sia μ una misura positiva definita su $\mathcal{M}$, allora:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. *$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_n)$ se $A_1, \cdots, A_n$ sono tali che $A_i \bigcap A_j = \emptyset$, $\forall A_i, A_j \in \mathcal{M}$, $\forall i \neq j$*

3. *Se $A \subseteq B$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}$*

4. *Se $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, con $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, $A_i \in \mathcal{M}$, allora $\mu(A_k) \to \mu(A)$ quando $k \to +\infty$*

5. *Se $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, con $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, $A_i \in \mathcal{M}$ e $\mu(A_1) < \infty$, allora $\mu(A_k) \to \mu(A)$ quando $k \to +\infty$.*

Dimostrazione. Si veda [13] , Teorema 1.19 pag 29. ■

Diamo ora la definizione di misure di Borel regolari, che saranno le misure che useremo sempre in seguito.

Definizione 1.58 Una misura μ si dice di Borel su X se è definita sulla $\sigma - algebra$ di tutti gli insiemi di Borel $E \subset X$, X spazio di Hausdorff localmente compatto. Inoltre se μ è positiva E si dice esternamente regolare se $\mu(E) = \inf\{\mu(V)$, V aperto e $E \subset V\}$; E si dice internamente regolare se $\mu(E) = \sup\{\mu(K), K$ compatto, $K \subset E\}$.
Se ogni insieme di Borel in X è simultaneamente esternamente ed internamente regolare, μ si dice regolare.

Definizione 1.59 Siano μ e λ due misure su X. Diciamo che μ è assolutamente continua rispetto a λ (e scriviamo $\mu \ll \lambda$) se $\mu(E) = 0$ per ogni $E \in \mathcal{M}$ per cui $\lambda(E) = 0$.
Diciamo che μ e λ sono mutuamente ortogonali o mutuamente singolari (e scriviamo $\mu \perp \lambda$) se $X = A \cup B$ e $\mu(A) = \lambda(B) = 0$.

Ricordiamo ora il *Teorema di decomposizione di Lebesgue* e il *Teorema di Radon-Nikodim.*

Teorema 1.60 *Siano μ e λ due misure positive limitate sulla $\sigma - algebra$ $\mathcal{M}$ in un insieme X : allora*

1. *Esiste una sola coppia di misure λ_a e λ_s tali che*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s\,, \quad \lambda_a \ll \mu\,, \quad \lambda_s \perp \mu$$

2. *$\exists ! h(x) \in L^1(d\mu)$ tale che*

$$\lambda_a(E) = \int_E h d\mu \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

Dimostrazione. Si veda [13], Teotema 6.9, pag 142. ■

Osservazione 1.61 La decomposizione di Lebesgue continua a valere per funzioni di insiemi σ-subadditivi e non necessariamente σ-additivi

Definizione 1.62 Definiamo μ una *misura con segno una funzione definita su $\mathcal{M}$ a valori in $\mathbf{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ tale che:*

1. *μ assuma al massimo uno dei valori $+\infty$, $-\infty$;*
2. *$\mu(\emptyset) = 0$;*
3. *$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ per ogni successione di insiemi E_i a due a due disgiunti.*

Definizione 1.63 Sia $\{E_i\} \in \mathcal{M}$ una partizione di E. Sappiamo che se μ è una misura su $\mathcal{M}$ allora $\mu(E) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i)$.
Si definisce la variazione totale di μ,$|\mu|$, in questo modo:

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i)\,,$$

dove l'estremo superiore si intende al variare della scelta della partizione di E.
Ha senso a questo punto definire

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) \qquad \text{e} \qquad \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

dove μ^- e μ^+ sono misure positive tali che $\mu = \mu^+ - \mu^-$ e $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$.

Osservazione 1.64 Per dare senso alla definizione precedente dobbiamo assumere che la serie $\mu(E) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i)$ converga e il fatto che l'unione degli insiemi E_i non cambi sal variare degli indici, implica che la serie deve convergere insieme a ogni suo riordinamento, quindi la convergenza è assoluta.

Chiamiamo μ^+ e μ^- rispettivamente variazione positiva e variazione negativa di μ; la decomposizione $\mu = \mu^+ - \mu^-$ è nota come decomposizione di Jordan

1.4 Operatori differenziali

Iniziamo ad affrontare il problema lineare introducendo il seguente risultato:

Teorema 1.65 (di Lax-Milgram) *Sia V uno spazio di Hilbert, e sia*

$$b : V \times V \to \mathbf{R}$$

un'applicazione bilineare, continua e tale che

$$\forall u \in V\, \exists \alpha \in \mathbf{R} \quad \textit{tale che} \quad b(u,u) \geq \alpha \|u\|_v^{\,2} \qquad (\textit{ coercitività }).$$

Allora

$$\forall u \in V \exists! w \in V \quad \textit{tale che} \quad b(u,v) = (w,v)_V \qquad \forall v \in V$$

Dimostrazione. Si veda [5], Corollario V.8, pag 136. ∎

Sia ora A(x) una matrice simmetrica uniformemente ellittica, cioè:

$$\exists \alpha > 0 \quad \text{t.c.} \quad (A(x)\cdot \xi, \xi) \geq \alpha |\xi|^2\, \forall \xi$$

e sia

$$b(u,v) = \int_\Omega A(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

Si vede che $b(u,v)$ é nelle ipotesi del Teorema di Lax-Milgram e quindi

$$\forall T \in H^{-1}(\Omega)\, \exists! u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{t.c.} \quad b(u,v) = \langle T, v\rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Allora u risolve il problema

$$\begin{cases} -\text{div}\,(A(x)\nabla u) = T & \text{su}\, \Omega \\ \qquad\qquad u = 0 & \text{su}\, \partial\Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

Inoltre u è un punto estremale per il funzionale continuo su $H_0^1(\Omega)$

$$I(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega A(x)|\nabla v|^2 - \langle T, v\rangle\,.$$

Considereremo ora operatori differenziali del tipo $-\text{div}\,(a(x, u(x), \nabla u(x)))$ con le seguenti proprietà :

1. $a(x, s, \xi) : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ è una funzione di di Caratheodory, cioè misurabile rispetto alla prima variabile e continua rispetto alle altre due;

2. $\exists \alpha > 0\, t.c. \quad a(x, s, \xi) \cdot \xi \geq \alpha \cdot |\xi|^p \quad \forall p > 1\,;$ (coercitività)

3. $\exists \beta > 0 \, \exists \, 0 \leq k(x) \in L^{p'}(\Omega)$ t.c.

$$|a(x, s, \xi)| \leq \beta[k(x) + |s|^{p-1} + |\xi|^{p-1}]\,; \qquad \text{(continuità)}$$

4. $(a(x, s, \xi) - a(x, s, \eta), \xi - \eta) > 0.$ (monotonia)

Osservazione 1.66 Se $u(x) \in W_0^{1,p}$, allora $a(x, u(x), \nabla u(x)) \in (L^{p'}(\Omega))^N$; si vede facilmente sfruttando la continuità di $a(x, u(x), \nabla u(x))$ e notando che $k(x) \in L^{p'}(\Omega)$ per definizione e che $|u|^{p-1}$ e $|\nabla u|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$ essendo $|u|$ e $|\nabla u| \in L^p(\Omega)$.

Teorema 1.67 (di Leray -Lions) *Sia $a(x, u(x), \nabla u(x))$ una funzione tale che soddisfi le quattro proprietà appena enunciate. Allora l'operatore*

$$A(u(x)) = -\mathrm{div}\,(a(x, u(x), \nabla u(x))) \qquad A : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W_0^{-1,p'}(\Omega)$$

è suriettivo, cioè

$$\forall F \in \left(L^{p'}(\Omega)\right)^N \quad \exists u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad t.c. \quad A(u) = -\mathrm{div}(F)\,,$$

nel senso che

$$\int_\Omega a(x, u(x), \nabla u(x)) \nabla \varphi(x) = \int_\Omega F \varphi \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Inoltre se $p > N$ sappiamo che $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega)$. Allora $\mathcal{M}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ quindi si ha esistenza di soluzioni (per dualità) del problema

$$-\mathrm{div}(a(x, u(x), \nabla u(x))) = \mu \quad con \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,.$$

Dimostrazione. Si veda [9]. ■

Proposizione 1.68 *Se $a(x, u(x), \nabla u(x))$ non dipende esplicitamente da u, allora la soluzione è anche unica.*

Teorema 1.69 *Sotto le stesse ipotesi del Teorema precedente abbiamo inoltre che se*

1. *Se* $F \in (L^q(\Omega))^N$ *con* $q > \frac{N}{p-1}$, *allora* $u \in L^\infty(\Omega)$
2. *Se* $F \in (L^q(\Omega))^N$ *con* $p' \leq q < \frac{N}{p-1}$, *allora* $u \in L^{[q(p-1)]^*}(\Omega)$

Dimostrazione. Si veda [2]. ■

Capitolo 2

Esistenza di soluzioni nel caso $\mu \in \mathcal{M}_0(\Omega)$

Consideriamo ora il seguente funzionale su $W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$J(v) = \frac{1}{p}\int_\Omega a(x,v)|\nabla v|^p - \int_\Omega f v\,,$$

con $f \in L^{p'}(\Omega)$ e $0 < \alpha \leq a(x,s) \leq \beta \;\; \alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$. Allora $J(v)$ è convesso rispetto a ∇v e debolmente semicontinuo inferiormente, quindi $\exists\, u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tale che $J(u) \leq J(v) \;\; \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Scriviamo le equazioni di Eulero per u: siano $t \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ e $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\frac{J(u+t\varphi) - J(u)}{t} = \frac{1}{p}\frac{\int_\Omega a(x,u+t\varphi)|\nabla u + t\nabla\varphi|^p - \int_\Omega a(x,u)|\nabla u|^p}{t} - \frac{t \cdot \int_\Omega f\varphi}{t}$$

Supponiamo inoltre che esista $a_s(x,s)$ e che questa sia limitata, $|a_s(x,s)| \leq c \in \mathbf{R}^+$, e facciamo ulteriori ipotesi alla φ, cioé non ci accontentiamo piú di $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, ma abbiamo bisogno anche di $\varphi \in L^\infty(\Omega)$: questo vuol dire che il funzionale $J(v)$ non è derivabile in tutte le direzioni ma solo lungo quelle $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Si ha dunque che u è tale che

$$\int_\Omega a(x,u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi + \frac{1}{p}\int_\Omega a_s(x,u)|\nabla u|^p\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \tag{2.1}$$

Osserviamo ora che (2.1) non è altro che la forma debole del problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,u(x)|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u) + \frac{1}{p}a_s(x,u(x))|\nabla u(x)|^p = f \quad \text{in}\,\Omega \\ \qquad\qquad u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,, \quad f \in L^{p'}(\Omega) \end{cases} \tag{2.2}$$

2.1 Dato $W^{-1,p'}(\Omega)$

Affronteremo ora un caso un po'più generale rispetto a (2.2): sia $g(x, s, \xi)$ una funzione di Caratheodory tale che

$$g(x, s, \xi)s \geq 0 \tag{2.3}$$

$$|g(x, s, \xi)| \leq b(|s|)\left(|\xi|^p + c(x)\right) , \tag{2.4}$$

con $0 \leq c(x) \in L^1(\Omega)$; allora si può considerare il seguente problema,

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a(x, u(x), \nabla u(x))) + g(x, u(x), \nabla u(x)) = h \quad \text{in}\, \Omega \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases} \tag{2.5}$$

dove $h \in W^{-1,p'}(\Omega)$, $b(x)$ è una funzione continua, positiva e crescente e $A(u)$ è un operatore differenziale del tipo visto nel capitolo precedente, cioè

$$A(u) = -\operatorname{div}(a(x, u(x), \nabla u(x)))$$

e $a(x, s, \xi)$ è una funzione di Caratheodory con le seguenti proprietà:

$$a(x, s, \xi) \cdot \xi \geq |\xi|^p \tag{2.6}$$

$$|a(x, s, \xi)| \leq \beta\left(|\xi|^{p-1} + |s|^{p-1} + k(x)\right) \tag{2.7}$$

$$\left(a(x, s, \xi) - a(x, s, \eta)\right)(\xi - \eta) > 0 \quad \forall \xi \neq \eta. \tag{2.8}$$

Osserviamo che l'equazione (2.2) è solo un caso particolare di (2.5) con

$$a(x, s, \xi) = a(x, s)|\xi|^{p-2} \cdot \xi \quad g(x, s, \xi) = \frac{1}{p} a_s(x, s)|\xi|^p \quad h = f\,.$$

Teorema 2.1 *Per ogni $h \in W^{-1,p'}(\Omega)$ esiste almeno una soluzione $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ del problema (2.5) con $a(x, u, \nabla u)$ e $g(x, u, \nabla u)$ con le proprietà appena elencate, cioè:*

$$\int_\Omega a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla v + \int_\Omega g(x, u, \nabla u)v = \langle h, v\rangle \qquad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)\,. \tag{2.9}$$

Inoltre

$$g(x, u, \nabla u) \in L^1(\Omega)\,, \qquad g(x, u, \nabla u)u \in L^1(\Omega)\,.$$

Premettiamo il seguente Lemma che sarà utile nel corso della dimostrazione:

Lemma 2.2 *Sia* $\varphi_\lambda(s) = se^{\lambda s^2}$ *e siano* $a, b \in \mathbf{R}$. *Allora se* $\lambda = \frac{b^2}{4a^2}$, *si ha:*

$$a\varphi'_\lambda(s) - b\varphi_\lambda(s) \geq \frac{1}{2} \quad \forall s \in \mathbf{R}$$

Dimostrazione del Teorema 2.1 Consideriamo

$$g_n(x, s, \xi) = \frac{g(x, s, \xi)}{1 + \frac{1}{n}|g(x, s, \xi)|}$$

ed il problema

$$\begin{cases} A(u_n(x)) + g_n(x, u_n(x), \nabla u_n(x)) = h \quad \text{in}\, \Omega \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases} \tag{2.10}$$

che, poichè $g_n(x)$ è limitata, ammette una soluzione u_n per il Teorema di Leray-Lions. Prendiamo ora le u_n come funzioni test in (2.10), allora otteniamo, usando la (2.3),

$$\langle A(u_n), u_n \rangle \leq \langle h, u_n \rangle$$

e quindi, dall'ellitticità di $A(u)$ e dalla disuguaglianza di Cauchy- Schwarz:

$$\alpha \|u_n\|^p \leq \|u_n\| \cdot \|h\| \,.$$

Questo vuol dire che le u_n sono limitate in $W_0^{1,p}(\Omega)$ e quindi esiste una sottosuccessione di u_n (ancora indicata con u_n) tale che:

1. $u_n \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$;

2. $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$

3. $u_n \to u$ *q.o.*.

Vogliamo far vedere che $u_n \to u$ forte in $W_0^{1,p}(\Omega)$ e che u risolve (2.5).
La dimostrazione è divisa in 3 passi:

Passo 1.

Dimostriamo che $u_n^+ \longrightarrow u^+$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$, dove $u_n^+ = \max\{u_n, 0\}$. Fissiamo una costante positiva k e definiamo $u_k = \min\{u, k\}$. Sia

$$z_n = u_n^+ - u_k^+ \,,$$

allora $z_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e quindi anche z_n^+ e z_n^- appartengono al medesimo spazio. Pertanto possiamo sceglierle come funzione test nella (2.9): ci occuperemo ora del comportamento di z_n^+: si ha

$$\langle A(u_n), z_n^+\rangle + \int_\Omega g(x,u,\nabla u) z_n^+ = \langle h, z_n^+\rangle.$$

Dalla (2.3) otteniamo

$$\langle A(u_n), z_n^+\rangle \leq \langle h, z_n^+\rangle$$

cioè

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla z_n^+ \leq \langle h, z_n^+\rangle.$$

Osservando che $u_n = u_n^+$ nell'insieme $\{x \in \Omega \text{ t.c. } z_n^+ > 0\}$ possiamo scrivere

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n^+)\nabla z_n^+ \leq \langle h, z_n^+\rangle;$$

dunque sottraendo ad ambo i membri la quantità $a(x,u_n,\nabla u_k)\cdot \nabla z_n^+$, abbiamo che

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (a(x,u_n,\nabla u_n^+) - a(x,u_n,\nabla u_k^+))\nabla z_n^+ \\ &\leq \int_\Omega - a(x,u_n,\nabla u_k^+))\nabla z_n^+ + \langle h, z_n^+\rangle\,.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Dalla limitatezza di u_n e u_k in $W_0^{1,p}(\Omega)$ si ha che $z_n^+ \to \left(u^+ - u_k^+\right)^+$ debolmente in $W_0^{1,p}(\Omega)$ e quasi ovunque; inoltre $u - u_k \to 0$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ per $k \to +\infty$, quindi se definiamo la quantità

$$\int_\Omega - a(x,u_n,\nabla u_k^+))\nabla z_n^+ + \langle h, z_n^+\rangle = R_k\,,$$

abbiamo che $R_k \to 0$ per $k \to +\infty$.
Passando ora al limite in (2.11) e ricordando che dalle proprietà (2.6) di $a(x,s,\xi)$ il primo memro della (2.11) è positivo otteniamo

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega (a(x,u_n,\nabla u_n^+) - a(x,u_n,\nabla u_k^+))\nabla z_n^+ \leq R_k\,. \tag{2.12}$$

Studiamo ora il comportamento di z_n^-: non è utile usare z_n^- come funzione test in (2.9), useremo dunque $\varphi_\lambda(z_n^-)$, dove $\varphi_\lambda(t) = se^{\lambda t^2}$ è la funzione definita nel Lemma 2.2. Osserviamo che

$$0 \leq z_n^- = (u_n^+ - u_k^+)^- \leq k,$$

cioè $z_n^- \in L^\infty(\Omega)$ e quindi $\varphi_\lambda(z_n^-) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ed è pertanto una funzione test ammissibile per (2.5).

$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\varphi_\lambda'(z_n^-)\nabla z_n^- + \int_\Omega g_n(x, u_n, \nabla u_n)\varphi_\lambda(z_n^-) = \langle h, \varphi_\lambda(z_n^-)\rangle \tag{2.13}$$

Chiamiamo $E_n = \{x \in \Omega\, t.c.\, u_n^+ \le u_k^+\}$ e $F_n = \{x \in \Omega\, t.c.\, 0 \le u_n \le u_k^+\}$. Abbiamo allora

$$\int_\Omega g_n(x, u_n, \nabla u_n)\varphi_\lambda(z_n^-) = \int_{E_n} g_n(x, u_n, \nabla u_n)\varphi_\lambda(z_n^-) \le$$

$$\text{[usando la (2.4),]}$$

$$\le \int_{F_n} g_n(x, u_n, \nabla u_n)\varphi_\lambda(z_n^-) \le$$

$$\text{[sfruttiamo ora la continuità di } g(x,s,\xi)\text{,]}$$

$$\le \int_{F_n} b(|u_n|)(|\nabla u_n|^p + c(x))\varphi_\lambda(z_n^-) \le$$

$$\text{[dato che siamo su } F_n \text{ e quindi } 0 \le u_n \le u_k \le k\text{,]}$$

$$\le b(k)\int_{F_n} (|\nabla u_,|^p + c(x))\varphi_\lambda(z_n^-) \le$$

$$\text{[usiamo l'ellitticità di } a(x,s,\xi)\text{,]}$$

$$\le \frac{b(k)}{\alpha}\int_{F_n} a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n \varphi_\lambda(z_n^-) + b(k)\int_{F_n} c(x)\varphi_\lambda(z_n^-). \tag{2.14}$$

Oservando che quando $u_n \le 0$ allora $z_n^- = u_k^+$, si ha

$$\int_\Omega - a(x, u_n, \nabla u_n^+)\nabla z_n^- \varphi_\lambda'(z_n^-) = \int_\Omega - a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla z_n^- \varphi_\lambda'(z_n^-)$$

$$+\int_\Omega [a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u_n, \nabla u_n^+)]\nabla u_k^+ \varphi_\lambda'(u_k^+)\,, \tag{2.15}$$

in quanto il secondo integrale del secondo membro è diverso da zero solo dove

$u_n \leq 0$. Allora :

$$\int_\Omega -[a(x,u_n,\nabla u_n^+) - a(x,u_n,\nabla u_k^+)]\nabla z_n^- \varphi'_\lambda(z_n^-) =$$

[sommando la (2.13) e sostituendo la (2.15) otteniamo]

$$= \int_\Omega -[a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u_n,\nabla u_n^+)]\nabla u_k^+ \varphi_\lambda(u_k^+) - \langle h, \varphi_\lambda(z_n^-)\rangle +$$
$$\int_\Omega g_n(x,u_n,\nabla u_n)\varphi_\lambda(z_n^-) + \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_k^+)\varphi_\lambda(z_n^-) \leq$$

[sostituendo ora la (2.14)]

$$\leq \int_\Omega -[a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u_n,\nabla u_n^+)]\nabla u_k^+ \varphi_\lambda(u_k^+) - \langle h, \varphi_\lambda(z_n^-)\rangle +$$
$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_k^+)\varphi_\lambda(z_n^-) + \tfrac{b(k)}{\alpha}\int_{F_n} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n \varphi_\lambda(z_n^-)$$
$$+ b(k)\int_\Omega c(x)\varphi_\lambda(z_n^-) =$$

[aggiungendo e sottraendo$\tfrac{b(k)}{\alpha}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n^+)\nabla u_k^+ \varphi_\lambda(z_n^-)$

e spezzando in due $\int_{F_n} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n \varphi_\lambda(z_n^-)$si ha :]

$$= \int_\Omega -[a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u_n,\nabla u_n^+)]\nabla u_k^+ \varphi_\lambda(u_k^+) - \langle h, \varphi_\lambda(z_n^-)\rangle +$$
$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_k^+)\varphi_\lambda(z_n^-) + \frac{b(k)}{\alpha}\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_n^+) - a(x,u_n,\nabla u_k^+)]\nabla z_n^- \varphi'_\lambda(z_n^-) +$$
$$\frac{b(k)}{\alpha}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n^+)\nabla u_k^+ \varphi_\lambda(z_n^-) + \frac{b(k)}{\alpha}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_k^+)\nabla z_n^- \varphi_\lambda(z_n^-) +$$
$$b(k)\int_\Omega c(x)\varphi_\lambda(z_n^-) \tag{2.16}$$

A questo punto scegliamo λ come nel Lemma 2.2. Grazie a questa scelta di λ otteniamo

$$\int_\Omega -\frac{1}{2}[a(x,u_n,\nabla u_n^+) - a(x,u_n,\nabla u_k^+)]\nabla z_n^- \varphi_\lambda(z_n^-) \leq$$
$$\int_\Omega -[a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u_n,\nabla u_n^+)]\nabla z_n^- - \langle h, \varphi_\lambda(z_n^-)\rangle +$$
$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_k^+)\varphi'_\lambda(z_n^-) + \frac{b(k)}{\alpha}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n^+)\nabla u_k^+ \varphi_\lambda(z_n^-) +$$

$$\frac{b(k)}{\alpha}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_k^+)\nabla z_n^-\varphi_\lambda(z_n^-)+$$
$$+b(k)\int_\Omega c(x)\varphi_\lambda(z_n^-) \tag{2.17}$$

Notiamo che $a(x,u_n,\nabla u_n)$ e $a(x,u_n,\nabla u_n^+)$ sono limitate in $(L^{p'}(\Omega))^N$ grazie alla (2.7) e alla limitatezza di u in $W_0^{1,p}(\Omega)$, dunque possiamo estrarre sottosuccessioni (senza cambiare notazione) tali che

$$a(x,u_n,\nabla u_n) \rightharpoonup \phi \quad \text{in } (L^{p'}(\Omega))^N$$

e

$$a(x,u_n,\nabla u_n^+) \rightharpoonup \psi \quad \text{in } (L^{p'}(\Omega))^N.$$

Quindi utilizzando il Teorema di Lebesgue possiamo passare al limite sulle n (k è fissato!) nel secondo membro di (2.17) ed ottenenere

$$\int_\Omega -[\phi-\psi]\nabla u_k^+ - \langle h, \varphi_\lambda((u^+-u_k^+)^-)\rangle +$$
$$\int_\Omega \psi\varphi_\lambda'((u^+-u_k^+)^-) + \frac{b(k)}{\alpha}\int_\Omega \phi\nabla u_k^+\varphi_\lambda(u^+-u_k^+)^- +$$
$$\frac{b(k)}{\alpha}\int_\Omega \psi\nabla(u^+-u_k^+)\varphi_\lambda((u^+-u_k^+)^-)+$$
$$b(k)\int_\Omega c(x)\varphi_\lambda((u^+-u_k^+)^-)\,.$$

Osserviamo che per costruzione $(u^+-u_k^+)\geq 0$ e quindi $(u^+-u_k^+)^-=0$. Inoltre $\varphi(0)=0$: combinando insieme queste due informazioni, espressione precedente si riduce a

$$\int_\Omega -[\phi-\psi]\nabla u_k^+.$$

Ma se consideriamo la successione

$$[a(x,u_n,\nabla u_n^+)-a(x,u_n,\nabla u_k^+)]\nabla(u_n)_k^+$$

(dove $(u_n)_k=\min\limits_{x\in\Omega}\{u_n,k\}$) questa è nulla quasi ovunque e converge quasi ovunque verso $-[\phi-\psi]\nabla u_k^+$ che dunque è nulla anch'essa. Per il Teorema di Lebesgue possiamo passare al limite sotto il segno di integrale, allora

$$\int_\Omega -[\phi-\psi]\nabla u_k^+ = 0.$$

Dunque passando ora al limite in (2.17) si ha

$$\limsup_{n\to+\infty} -\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_n^+) - a(x,u_n,\nabla u_k^+)]\nabla(u_n^+ - u_k^+)^- \le 0. \tag{2.18}$$

Concludiamo ora il primo passo: infatti

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to+\infty} -\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_n^+) - a(x,u_n,\nabla u^+)]\nabla(u_n^+ - u^+) \le \\
&\limsup_{n\to+\infty} -\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_n^+) - a(x,u_n,\nabla u_k^+)]\nabla(u_n^+ - u_k^+)^+ + \\
&\limsup_{n\to+\infty} -\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_n^+) - a(x,u_n,\nabla u_k^+)]\nabla(u_n^+ - u_k^+)^- + \\
&\limsup_{n\to+\infty} -\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_n^+) - a(x,u_n,\nabla u_k^+)]\nabla(u_k^+ - u^+) + \\
&\limsup_{n\to+\infty} -\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_k^+) - a(x,u_n,\nabla u^+)]\nabla(u_n^+ - u^+) \le
\end{aligned}$$

[Il primo integrale è uguale a R_k per la (2.12); il secondo tende a zero per la (2.18); il quarto tende a zero poiché $u_n \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$]

$$\le R_k + \limsup_{n\to+\infty} -\int_\Omega [\phi - a(x,u,\nabla u_k^+)]\nabla(u_k^+ - u^+)$$

che tende a zero per $k \to +\infty$. A questo punto ci serviremo del seguente Lemma, la cui dimostrazione verrà data piú avanti:

Lemma 2.3 *Sia $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ una successione tale che*

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ in } \ W_0^{1,p}(\Omega)$$

e tale che

$$\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u_n,\nabla u)]\nabla(u_n - u) \to 0$$

dove a è una funzione con le proprietà (2.6),(2.7) e (2.8). Allora

$$u_n \to u \ \text{ in } \ W_0^{1,p}(\Omega).$$

Grazie al Lemma appena enunciato si può concludere che

$$u_n^+ \to u^+ \quad \text{forte in } W_0^{1,p}(\Omega)$$

Passo 2.

In maniera analoga si dimostra la convergenza di u_n^- verso u^- forte in

$W_0^{1,p}(\Omega)$: si considera $w_n^- = u_n^- - u_k^-$, dove $u_k^- = \min_{x\in\Omega}\{u^-, k\}$, e si studia il comportamento di w_n^+ e w_n^-, scegliendo come funzioni test in (2.5) nel primo caso proprio w_n^+ e nel secondo $\varphi_\lambda(w_n^-)$. Si ottiene, ripetendo gli stessi passaggi fatti nel Passo 1, che

$$u_n^- \to u^- \,\text{in}\, W_0^{1,p}(\Omega).$$

Passo 3.
Mettendo insieme i risultati dei primi due passi si ottiene

$$u_n \to u \text{ in } W_0^{1,p}(\Omega)\,;$$

e, pur di passare a sottosuccessioni, si ha convergenza quasi ovunque di u_n e ∇u_n rispettivamente verso u e ∇u. Inoltre dalla continuità di $g(x, s, \xi)$ abbiamo che

$$g_n(x, u_n, \nabla u_n) \to g(x, u, \nabla u) \quad q.o.$$

$$g_n(x, u_n, \nabla u_n)u_n \to g(x, u, \nabla u)u \quad q.o.$$

Vogliamo dimostrare che

$$g_n(x, u_n, \nabla u_n) \to g(x, u, \nabla u) \quad \text{in}\, L^1(\Omega)\,. \tag{2.19}$$

Si definisce, così , la seguente partizione di Ω :

$$A_m^n = \{x \in \Omega\, t.c.\, |u_n| \le m\} \qquad B_m^n = \{x \in \Omega\, t.c.\, |u_n| > m\}\,, \qquad \forall m \in \mathbf{R}^+$$

e si considera un insieme $E \subset \Omega$ misurabile. Allora

$$\int_E g_n(x, u_n, \nabla u_n) =$$

$$\int_{E\cap A_m^n} g_n(x, u_n, \nabla u_n) + \int_{E\cap B_m^n} g_n(x, u_n, \nabla u_n) \le$$

$$\int_{E\cap A_m^n} b(|u_n|)(|\nabla u_n|^p + c(x)) + \int_{E\cap B_m^n} \frac{1}{m} g_n(x, u_n, \nabla u_n)u_n\,;$$

dall'ipotesi di segno su g_n, dalla limitatezza di $g_n(x, u_n, \nabla u_n)$ in $L^\infty(\Omega)$ e di u_n in $W_0^{1,p}(\Omega)$ abbiamo che

$$\exists c \in \mathbf{R}^+ : \quad 0 \le \int_\Omega g_n(x, u_n, \nabla u_n)u_n \le c\,.$$

Dunque
$$\int_E g_n(x,u_n,\nabla u_n) \le \int_{E\cap A_m^n} b(|m|)(|\nabla u_n|^p + c(x)) + \frac{1}{m}\cdot c;$$
sappiamo però che
$$\nabla u_n \to \nabla u \text{ forte in } L^p(\Omega)\,,$$
qundi, dal Teorema di Vitali, $|\nabla u_n|^p$ è equintegrabile. Allora anche $g_n(x,u_n,\nabla u_n)$ lo è: ancora dal Teorema di Vitali deduciamo che
$$g_n(x,u_n,\nabla u_n) \to g(x,u,\nabla u) \quad \text{ forte in } L^1(\Omega)\,,$$
cioé la (2.19). Possiamo così passare al limite in
$$\langle A(u_n),v\rangle + \int_\Omega g_n(x,u_n,\nabla u_n)\cdot v = \langle h,v\rangle \tag{2.20}$$
ed ottenere una soluzione del problema
$$\langle A(u),v\rangle + \int_\Omega g(x,u,\nabla u))\cdot v = \langle h,v\rangle \qquad \forall v\ \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)\,. \tag{2.21}$$
■

Osservazione 2.4 Si noti inoltre che
$$\langle A(u),u\rangle + \int_\Omega g(x,u,\nabla u)u = \langle h,u\rangle. \tag{2.22}$$
Infatti scegliendo u_k come funzione test abbiamo che
$$\langle A(u)-h,u_k\rangle \to \langle A(u)-h,u\rangle$$
e
$$|g(x,u,\nabla u)u_k| \le |g(x,u,\nabla u)|\cdot|u| \tag{2.23}$$
dove l'ultimo termine è in $L^1(\Omega)$ in quanto
$$g_n(x,u_n,\nabla u_n)u_n \to g(x,u,\nabla u)u \,\text{q.o.}\,,$$
$$g_n(x,u_n,\nabla u_n)u_n \ge 0 \quad \text{ e } \quad \int_\Omega g_n(x,u_n,\nabla u_n)u_n \le c$$
e quindi si può passare al limite sotto il segno di integrale per il Lemma di Fatou. Allora il teorema di Lebesgue mi permette di dimostrare che
$$g(x,u,\nabla u)u_k \to g(x,u,\nabla u)u \ \text{ in }\ L^1(\Omega)$$
e quindi ottenere (2.22). In particolare, come volevamo,
$$g(x,u,\nabla u)u \in L^1(\Omega)\,.$$

Dimostrazione del Lemma 2.3

Sia

$$D_n = [a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u_n,\nabla u)] \cdot \nabla(u_n - u) \ : \qquad (2.24)$$

sappiamo che $D_n \geq 0$ per l'ipotesi di monotonia su $a(x,s,\xi)$ ed inoltre $D_n \to 0$ in $L^1(\Omega)$ per ipotesi. Allora è possibile estrarre una sottosuccessione (ancora denotata con u_n) tale che

$$u_n \to u \quad q.o.$$

e

$$D_n \to 0 \quad q.o..$$

Dunque esiste $Z \subset \Omega$ di misura nulla tale che

$$|u(x)| < \infty \quad |\nabla u| < \infty \quad \forall x \in \Omega \backslash Z\,.$$

Definiamo $\xi_n = \nabla u_n(x)$ e $\xi = \nabla u(x)$, allora

$$D_n = [a(x,u_n,\xi_n) - a(x,u_n,\xi)] \cdot (\xi_n - \xi).$$

Sfruttando ora l'ellitticità e la continuità di $a(x,s,\xi)$ otteniamo

$$D_n \geq \alpha|\xi_n|^p - c(x)\left(1 + |\xi_n|^{p-1} + |\xi_n|\right)$$

dove $c(x)$ è positiva e indipendente da n. Quindi $|\xi|$ è limitata, perció $\exists \xi^*$ tale che $\xi_n \to \xi^*$. Passando al limite nella (2.24) si ha

$$[a(x,u,\xi^*) - a(x,u,\xi)](\xi^* - \xi) = 0\,,$$

grazie alla continuità di $a(x,u,\xi)$ rispetto alle variabili s e ξ. Ma allora $\xi^* = \xi$ e quindi

$$\nabla u_n \to \nabla u \text{ q.o. in } \Omega\,, \quad \text{cioè in } \Omega \backslash Z.$$

Ancora grazie alla continuità di $a(x,u,\xi)$ abbiamo che

$$a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n \to a(x,u,\nabla u)\nabla u \quad \text{q.o..}$$

Vogliamo arrivare a dimostrare che

$$a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n \to a(x,u,\nabla u)\nabla u \quad \text{in } L^1(\Omega).$$

Tramite il Teorema di Vitali otteniamo, con la stessa tecnica usata nel Teorema 2.1,

$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n \to \int_\Omega a(x, u, \nabla u)\nabla u$$

e grazie al Teorema di Lebesgue

$$\begin{aligned}\int_\Omega |a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u, \nabla u)| \\ = 2\int_{\{0 \le a(x,u_n,\nabla u_n \le a(x,u,\nabla u)\}} a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u, \nabla u) \\ + \int_\Omega (a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u, \nabla u)) .\end{aligned}$$

Si ottiene dunque che

$$a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n \to a(x, u, \nabla u)\nabla u \quad \text{in } L^1(\Omega).$$

A questo punto l'ellitticità di $a(x, s, \xi)$ ci fa concludere che

$$u_n \to u \quad \text{in } W_0^{1,p}(\Omega).$$

■

2.2 Dato $L^1(\Omega)$

In questo paragrafo mostreremo l'esistenza di soluzioni per il problema (2.5) quando il dato $h \in L^1(\Omega)$. In particolare vedremo che la regolarità della soluzione è $W_0^{1,p}(\Omega)$, fatto sorprendente se si pensa che la regolarità di una soluzione del problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x, u, \nabla u)) = f \quad \text{in} \quad \Omega \\ \qquad f \in L^1(\Omega) \quad u = 0 \text{ su} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

è solo $W_0^{1,q}(\Omega)$, $\forall q < \frac{N(p-1)}{N-1}$. Ciò è dovuto all'effetto regolarizzante del termine di ordine inferiore a crescita naturale nel gradiente.
Consideriamo dunque il seguente problema:

$$\begin{cases} A(u(x)) + g(x, u(x), \nabla u(x)) = f \quad \text{in } \Omega \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad g(x, u(x), \nabla u(x)) \in L^1(\Omega) , \end{cases} \tag{2.25}$$

dove $f \in L^1(\Omega)$, $A(u) = -\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u))$ con $a(x,u,\nabla u)$ scelta con le proprietà (2.6), (2.7) e (2.8), ma sulla g facciamo un'ipotesi in più rispetto al caso precedente:

$$\begin{cases} g(x,s,\xi)s \geq 0 \\ |g(x,s,\xi)| \leq b(|s|)\,(|\xi|^p + c(x)) \\ \exists \sigma\, e\, \gamma\, \in \mathbf{R}^+\, t.c.\, |g(x,s,\xi)| > \gamma|\xi|^p \quad \text{se } |s| \geq \sigma\,, \end{cases} \tag{2.26}$$

Allora abbiamo il seguente

Teorema 2.5 *Siano $a(x,s,\xi)$ e $g(x,s,\xi)$ scelte come in (2.6),(2.7) e (2.26), allora il problema (2.25) ammette almeno una soluzione, cioè:*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega g(x,u,\nabla u)\cdot\varphi = \langle h\,,\,\varphi\rangle \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad h \in L^1(\Omega) \quad \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)\,. \end{cases}$$

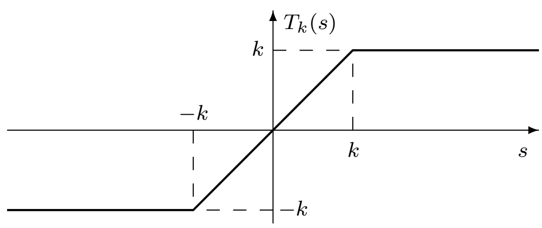
Inoltre $g(x,u(x),\nabla u(x)) \in L^1(\Omega)$.

Osservazione 2.6 In questo caso non è detto che

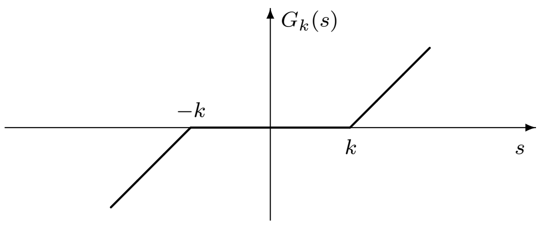
$$g(x,u(x),\nabla u(x))u \in L^1(\Omega).$$

Diamo ora delle definizioni di funzioni che useremo molto spesso in seguito:

Definizione 2.7 Definiamo $T_k(s) = \max\{-k\,,\, \min,(k,s)\}$.



Definizione 2.8 Definiamo $G_k(s) = (|s|-k)^+ \cdot \mathrm{sign}(s)$, dove $(\cdot)^+$ indica la parte positiva e $\mathrm{sign}(s)$ il segno di s.



Osservazione 2.9 Dalle definizioni di $G_k(s)$ e $T_k(s)$ segue che se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, allora anche $G_k(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e $T_k(u) \in W^{1,p}(\Omega)$. Inoltre $\nabla G_k(u) = G'(u) \cdot \nabla u = \nabla u \cdot \chi_{\{x\in\Omega\, t.c.\, |u|>k\}}$ e $\nabla T_k(u) = T'(u) \cdot \nabla u = \nabla u \cdot \chi_{\{x\in\Omega\, t.c.\, |u|<k\}}$, dove χ_I indica la funzione caratteristica dell'insieme I.

Osservazione 2.10 $G_k(s) + T_k(s) = s$.

Dimostrazione. Dal teorema precedente sappiamo risolve il caso $f \in L^{p'}(\Omega)$: consideriamo una successione di funzioni $\{f_n\} \in L^{p'}(\Omega)$ tale che

$$f_n \to f \text{ in } L^1(\Omega) \qquad \|f_n\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} .$$

Chiamiamo u_n una soluzione di:

$$\begin{cases} A(u_n(x)) + g(x, u_n(x), \nabla u_n(x)) = f_n & \text{in } \Omega \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad g(x, u_n(x), \nabla u_n(x)) \in L^1(\Omega) \quad f_n \in L^{p'}(\Omega) . \end{cases} \tag{2.27}$$

Vogliamo dimostrare che anche in questo caso la successione u_n è limitata in $W_0^{1,p}(\Omega)$, facendolo vedere prima per $T_k(u_n)$ e poi per $G_k(u_n)$. Allora scegliendo $T_k(u_n)$ come funzione test in (2.27), k costante positiva più grande di σ, e ricordando che

$$g(x, u_n, \nabla u_n) \cdot T_k(u_n) \geq 0 \quad \text{e} \quad a(x, u_n, \nabla u_n) \cdot T_k(u_n) \geq \alpha \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p ,$$

dalla disuguaglianza di Cauchy- Shwarz otteniamo

$$\alpha \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p \leq k \|f_n\|_{L^1(\Omega)} .$$

Dimostreremo ora che

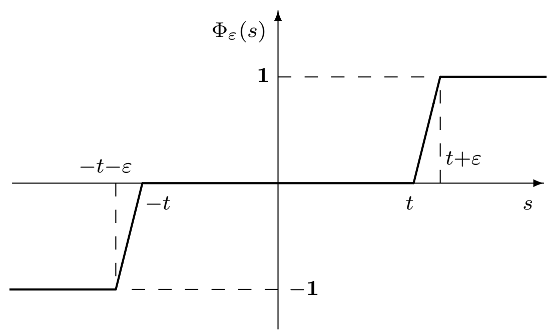
$$\int_{\{x\in\Omega\,:\,|u_n|>t\}} |g(x, u_n, \nabla u_n)| \leq \int_{\{x\in\Omega\,:\,|u_n|>t\}} |f_n| \tag{2.28}$$

Consideriamo una successione si funzioni $\psi_\varepsilon(s)$ regolari crescenti con derivata $\psi'_\varepsilon(s) \in L^\infty(\mathbf{R})$ e tali $\psi_\varepsilon(0) = 0\ \forall\varepsilon > 0$. Inoltre le $\psi_\varepsilon(s)$ vanno scelte in maniera tale che convergano quasi ovunque verso

$$\psi(s) = \begin{cases} 1 & \text{se}\, s > t \\ 0 & \text{se}\ -t \leq s \leq t \\ -1 & \text{se}\, s < -t. \end{cases} \tag{2.29}$$

Ad esempio una successione $\psi_\varepsilon(s)$ ammissibile è:

$$\psi_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon} T_\varepsilon\left(s - T_t(s)\right) \ , \quad t > 0\ , \varepsilon > 0$$



Allora scegliendo $\psi_\varepsilon(u_n)$ come funzioni test nella (2.27) otteniamo, osservando che $\int_\Omega a(x, u(x), \nabla u(x)) \cdot \nabla u_n \cdot \psi'_\varepsilon(u_n) \geq 0$,

$$\int_\Omega g(x, u(x), \nabla u(x)) \psi_\varepsilon(u_n) \leq \int_\Omega f_n(x) \psi_\varepsilon(u_n)$$

che sfruttando la (2.3) diventa, facendo tendere ε a 0,

$$\gamma \int_\Omega |\nabla G_t(u_n)|^p = \gamma \int_{\{|u_n| > t\}} |\nabla u_n|^p \leq \int_{\{|u_n| > t\}} |f_n(x)|\, , \qquad \forall t \geq \sigma\, .$$

Unendo quest'informazione e $\|T_k(u_n)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \dfrac{k}{\alpha} \|f_n\|_{L^1(\Omega)}$ otteniamo

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p = \int_{\{|u_n| > \sigma\}} |\nabla u_n|^p + \int_{\{|u_n| \leq \sigma\}} |\nabla u_n|^p \leq$$

$$\leq \frac{1}{\gamma}\int_{\{|u_n|>\sigma\}} |\nabla u_n|^p + \frac{\sigma}{\alpha}\|f_n\|_{L^1(\Omega)} \leq$$
$$\leq \left(\frac{\sigma}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\right)\|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

Allora u_n è limitata in $W_0^{1,p}(\Omega)$ e quindi è possibile estrarre una sottosuccessione (ancora chiamata u_n) e una funzione $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tale che:

1. $u_u \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$
2. $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$
3. $u_n \to u$ q.o.

Vogliamo dimostrare, come abbiamo fatto nel Teorema precedente, che $u_n \to u$ forte in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Per fare ciò useremo una tecnica simile a quella già vista; per prima cosa dimostriamo che

$$u_n^+ \to u^+ \text{ in } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Scegliamo k una costante positiva $k \geq \sigma$ e usiamo come funzione test in (2.27) $T_k(u_n^+ - u^+)^+$: allora otteniamo

$$\langle A(u_n), T_k(u_n^+ - u^+)^+\rangle + \int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)\cdot T_k(u_n^+ - u^+)^+ = \int_\Omega f\, T_k(u_n^+ - u^+)^+.$$

Osserviamo che dove $T_k(u_n^+ - u^+)^+ > 0$, allora sicuramente $u_n^+ > 0$, cioè $u_n > 0$ e dalla (2.26) si ha che $g(x,u_n,\nabla u_n) \geq 0$.

$$\langle A(u_n), T_k(u_n^+ - u^+)^+\rangle \leq \int_\Omega f_n \cdot T_k(u_n^+ - u^+)^+ \tag{2.30}$$

che, poiché u_u^+ e u_n coincidono dove $u_n^+ > u^+$, si riscrive

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n^+)\nabla T_k(u_n^+ - u^+)^+ \leq \int_\Omega f_n \cdot T_k(u_n^+ - u^+)^+. \tag{2.31}$$

Allora

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_n^+) - a(x,u_n,\nabla u^+)\nabla T_k(u_n^+ - u^+)^+ = 0. \tag{2.32}$$

Inoltre

$$\int_{\{u_n^+-u_n>k\}}[a(x,u_n,\nabla u_n^+)-a(x,u_n,\nabla u^+)]\nabla(u_n^+-u^+)^+\leq$$

$$\int_{\{u_n>k\}}[a(x,u_n,\nabla u_n^+)-a(x,u_n,\nabla u^+)]\nabla(u_n^+-u^+)^+\leq$$

$$c_1\left\{\int_{\{u_n>k\}}|\nabla u_n|^p+\int_{u_n>k}|u_n|^p+\int_{\{u_n>k\}}k(x)^{p'}+\int_{\{u_n>k\}}|\nabla u^+|^p\right\}\leq$$

$$[\text{ricordando che }\int_{u_n>t}|\nabla u_n|^p\leq\frac{1}{\gamma}\int_{u_n>t}|f_n|,t>\sigma]$$

$$\leq c'_1\left\{\int_{\{u_n>k\}}|f_n|^p+\int_{\{u_n>k\}}|u_n|^p+\int_{\{u_n>k\}}k(x)^{p'}+\int_{\{u_n>k\}}|\nabla u^+|^p\right\}=R_n^k\,,$$

dove per R_n^k si intende una quantità che tende a 0 quando $k\to+\infty$ uniformemente rispetto a n. Dunque mettendo insieme quest'informazione con la (2.32) si ottiene:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega[a(x,u_n,\nabla u_n^+-a(x,u_n,\nabla u^+)\nabla(u_n^+-u^+)^+=0. \tag{2.33}$$

Studiamo ora il comportamento di $z_n^-=(u_n^+-T_k(u^+))^-$ e scegliamo come funzione test in (2.27) le $w_n=\varphi_\lambda((u_n^+-T_k(u^+))^-)$, dove

$$\varphi_\lambda(s)=se^{\lambda s^2}\qquad\lambda=\frac{b(k)^2}{4\alpha^2}\,;$$

w_n è una funzione test ammissibile poiché dov'è non nulla si ha $0\leq u_n^+\leq k$, che implica $w_n\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Abbiamo allora

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla z_n^-\varphi_\lambda\text{'}(z_n^-)+\int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)\varphi_\lambda(z_n^-)=\int_\Omega f_n\varphi_\lambda(z_n^-).$$

Il secondo membro è esattamente uguale al secondo membro di (2.13), quindi dato che $\varphi_\lambda\in L^\infty(\Omega)$ si può passare al limite su n e si ottiene

$$\int_\Omega f_n\varphi_\lambda(z_n^-)\to\int_\Omega f\varphi_\lambda((u^+-T_k(u^+))^-)=0$$

poiché $T_k(u^+)\leq u^+$ e $\varphi_\lambda(0)=0$. Quindi, come nella (17),

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega-[a(x,u_n,\nabla u_n^+)-a(x,u_n,\nabla u^+)]\cdot\nabla(u_n^+-T_k(u_n^+))^-\leq 0 \tag{2.34}$$

Allora,

$$\int_\Omega -\,[a(x,u_n,\nabla u_n^+) - a(x,u_n,\nabla u^+)]\cdot\nabla(u_n^+ - u^+)^- =$$

$$= \int_{\{T_k(u^+)<u_n^+\le u^+\}} [a(x,u_n,\nabla u_n^+) - a(x,u_n,\nabla u^+)]\cdot\nabla(u_n^+ - u^+) +$$

$$+ \int_{\{u_n\le T_k(u^+)\}} [a(x,u_n,\nabla u_n^+) - a(x,u_n,\nabla u^+)]\cdot\nabla(u_n^+ - u^+) =$$

$$= \int_{\{k<u_n^+=u_n\le u^+\}} [a(x,u_n,\nabla u_n^+) - a(x,u_n,\nabla u^+)]\cdot\nabla(u_n^+ - u^+) +$$

$$\int_\Omega -\,[a(x,u_n,\nabla u_n^+) - a(x,u_n,\nabla T_k(u^+))]\cdot\nabla(u_n^+ - T_k(u^+)) +$$

$$+ \int_\Omega -\,[a(x,u_n,\nabla T_k(u^+)) - a(x,u_n,\nabla u^+)]\cdot\nabla(u_n^+ - T_k(u^+))^- +$$

$$+ \int_{\{u_n^+\le T_k(u^+)\}} [a(x,u_n,\nabla u_n^+) - a(x,u_n,\nabla u^+)]\cdot\nabla(T_k(u_n^+) - u^+)$$

in quanto

$$\{x\in\Omega \text{ t.c. } T_k(u^+) < u_n^+ \le u^+\} =$$

$$= \{x\in\Omega \text{ t.c. } k < u_n \le u^+\} \cup \{x\in\Omega \text{ t.c. } T_k(u^+) < u_n = u_n^+ \le k\}$$

e l'ultimo insieme è vuoto. Vediamo ora cosa possiamo dire su questi quattro integrali: per il primo abbiamo già fatto una stima precedentemente e abbiamo concluso che

$$\int_{\{k<u_n^+=u_n\le u^+\}} [a(x,u_n,\nabla u_n^+) - a(x,u_n,\nabla u^+)]\cdot\nabla(u_n^+ - u^+) = R_n^k;$$

il secondo tende a 0 per la (2.34); il terzo, per k fissato, tende a zero quando $n\to+\infty$; per il quarto abbiamo, sfruttando la disuguaglianza di Hölder,

$$\left|\int_{\{u_n^+\le T_k(u^+)\}} [a(x,u_n,\nabla u_n^+) - a(x,u_n,\nabla u^+)]\cdot\nabla(T_k(u_n^+) - u^+)\right|$$

$$\le c_2\left(\int_\Omega |\nabla(T_k(u^+) - u^+|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

che tende a 0 quando $k\to+\infty$. Allora

$$\int_\Omega -\,[a(x,u_n,\nabla u_n^+) - a(x,u_n,\nabla u^+)]\cdot\nabla(u_n^+ - u^+)^- = 0$$

Dunque abbiamo dimostrato che

$$\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_n^+) - a(x,u_n,\nabla u^+)]\cdot\nabla(u_n^+ - u^+) = 0.$$

Il Lemma 2.3 ci permette di concludere che

$$u_n^+ \to u^+ \,\text{in}\, W_0^{1,p}(\Omega).$$

Per dimostrare che

$$u_n^- \to u^- \,\text{in}\, W_0^{1,p}(\Omega)$$

usiamo la stessa tecnica: si prendono come funzioni test $T_k(u_n^- - u^-)^+$ nel primo caso e $\varphi_\lambda((u_n^- - T_k(u^-))^-)$ nel secondo. Si dimostra, dunque, che

$$u_n^- \to u^- \, in \, W_0^{1,p}(\Omega).$$

Abbiamo finalmente provato che

$$u_n \to u \quad \text{forte in} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$

Ci manca solo da dimostrare che $g(x,u_n,\nabla u_n) \to g(x,u,\nabla u)$ in $L^1(\Omega)$. Usiamo il Teorema di Vitali e quindi facciamo vedere che

$$\forall E \subset \Omega \,\text{misurabile}\, \lim_{|E|\to 0}\int |g(x,u_n,\nabla u_n)| = 0.$$

Allora

$$\int_E |g(x,u_n,\nabla u_n)| =$$

$$= \int_{E\cap X_m^n} |g(x,u_n,\nabla u_n)| + \int_{E\cap Y_m^n} |g(x,u_n,\nabla u_n)|\,,$$

dove $X_m^n = \{x\in\Omega\, t.c.\, |u_n|\le m\}$ e $Y_m^n = \{x\in\Omega\, t.c.\, |u_n| > m\}$; dunque

$$\int_E |g(x,u_n,\nabla u_n)| \le b(m)\int_E (|\nabla u_n|^p + c(x)) + \int_{|u_n|>m} |f_n|.$$

Possiamo così passare al limite in

$$\langle A(u_n), v\rangle + \int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)\cdot v = \langle f, v\rangle$$

e ottenere una soluzione di (2.25). ∎

2.3 Dato misura

Abbiamo dimostrato nei precedenti paragrafi l'esistenza di soluzioni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ per il problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,u(x),\nabla u(x))) + g(x,u(x),\nabla u(x)) = h \quad \text{in}\,\Omega \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad g(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega)\,, \end{cases} \tag{2.35}$$

nel caso in cui $h \in W^{-1,p'}(\Omega)$ e $h \in L^1(\Omega)$. Abbiamo dunque risolto il caso in cui il dato sia somma di due tali funzioni, quindi per tutta una categoria di misure: tutte le $\mu_0 \in \mathcal{M}_b$ tali che $\mu_0 \in L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$. Non tutte le misure peró appartengono a $L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$; si pensi ad esempio $\mu = \delta_{x_0}$, dove δ_{x_0} indica la massa di Dirac concentrata nel punto x_0:

$$\delta_{x_0} \notin L^1(\Omega) + W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{se}\ p \leq N\,.$$

Per caratterizzare le misure regolari che vi appartengono introduciamo la p-capacità di un insieme:

Definizione 2.11 Sia $K \subset \Omega$, K compatto: definiamo

$$W(K,\Omega) = \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega)\ :\ \varphi \geq \chi_K\},$$

dove per χ_K intendiamo la funzione caratteristica del compatto K.
Allora

$$\mathrm{cap}_p(K,\Omega) = \inf_{\varphi \in W(K,\Omega} \left\{ \int_\Omega |\nabla\varphi|^p \right\}.$$

con la convenzione di assumere $\inf\{\emptyset\} = +\infty$.

La definizione di p-capacità si può ora estendere dai compatti agli aperti in questo modo: sia $A \subset \Omega$, A aperto

$$\mathrm{cap}_p(A,\Omega) = \sup\left\{\mathrm{cap}_p(K,\Omega)\,,\ K \subset A\right\}$$

e finalmente possiamo definire la p-capacità dei booreliani come

$$\mathrm{cap}_p(\mathcal{B},\Omega) = \sup\left\{\mathrm{cap}_p(A,\Omega)\,,\ \mathcal{B} \subset A\right\}.$$

D'ora in poi, a meno che non serva la scrittura esplicita, chiameremo la capacità di un insieme con $\mathrm{cap}_p(\cdot)$, invece di $\mathrm{cap}_p(\cdot,\Omega)$.

Osservazione 2.12 La p-capacità è una misura esterna, infatti è definita su tutti i sottoinsiemi boreliani di Ω, assume valori in $[0, +\infty]$ ed inoltre gode delle seguenti proprietà:

1. $\mathrm{cap}_p(\emptyset, \Omega) = 0$;
2. Se $E_1 \subset E_2$, allora $\mathrm{cap}_p(E_1, \Omega) \leq \mathrm{cap}_p(E_2, \Omega)$;
3. Se $E = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$, allora $\mathrm{cap}_p(E, \Omega) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{cap}_p(E_i, \Omega)$.

La p-capacità non è, però, una misura in quanto manca, in generale, l'additività su insiemi disgiunti. Infatti per p=2 la cap_2 coincide con la capacità fisica dei conduttori, ed è noto che la capacità di un conduttore uniformemente carico costituito da due parti disgiunte, posti a piccola distanza tra loro, è strettamente minore della somma delle capacità dei singoli conduttori.

Indicheremo con $\mathcal{M}_0(\Omega)$ lo spazio di tutte le misure $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ tali che $\mu \ll \mathrm{cap}_p$, dove per asssoluta continuità rispetto alla p-capacità intendiamo:

$$\mu \ll \mathrm{cap}_p \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(E) = 0 \, \forall E \subset \Omega \text{ t.c. } \mathrm{cap}_p(E) = 0.$$

Diciamo invece che μ è singolare rispetto alla p-capacità (e scriveremo $\mu \perp \mathrm{cap}_p$) se $\mu(E) = \mu(E \cap A)\, , \forall E\, , \mathrm{cap}_p(A) = 0\, .$
Abbiamo allora il seguente teorema che caratterizza $\mathcal{M}_0(\Omega)$:

Teorema 2.13 *Sia $1 < p < +\infty$ e sia $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$. Allora $\mu \in \mathcal{M}_0(\Omega)$ se e solo se $\mu \in L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Si veda [4]. ■

Osservazione 2.14 Se $\mu \in \mathcal{M}_0^p$ abbiamo visto che possiamo scriverla come la somma di una funzione $L^1(\Omega)$ e di un elemento di $W^{-1,p'}(\Omega)$; questa decomposizione non è, però, unica. Si osservi infatti che

$$W^{-1,p'}(\Omega) \bigcap L^1(\Omega) \neq \{0\}\, .$$

Teorema 2.15 *Sia μ una misura regolare, allora esiste un'unica decomposizione*

$$\mu = \mu_0 + \lambda\, , \quad \textit{con } \mu_0 \in \mathcal{M}_0(\Omega) \textit{ e } \lambda \perp \mathrm{cap}_p$$

Dimostrazione.
Esistenza.
Sia
$$\alpha = \sup\{\mu(E),\, E \text{ boreliano},\; \mathrm{cap}_p(E) = 0\}\,,$$
e sia A_n una successione crescente di sottoinsiemi boreliani di Ω tali che $\mu(A_n) \to \alpha$ quando $n \to +\infty$. Definiamo
$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$
allora, dalla σ-subadditività abbiamo che $\mathrm{cap}_p(A) = 0$, e dalla regolarità della μ si ha che $\mu(A) = \alpha$. Definiamo ora
$$\mu_0 = \mu\,|_A \qquad \lambda = \mu\,|_{A^c}\,.$$
In questo modo λ ha le caratteristiche richieste dal Teorema. Studiamo dunque il comportamento di μ_0 sugli insiemi di p-capacità nulla. Sia $E \subset \Omega$ tale che $\mathrm{cap}_p(E) = 0$; se, per assurdo, fosse $\mu_0(E) \neq 0$ avremmo:
$$\mu(A \cup E) = \mu_0(A \cup E) + \lambda(A \cup E) = \mu_0(E) + \lambda(A) > \alpha$$
che è assurdo perché (ancora dalla σ-subadditività) $\mathrm{cap}_p(A \cup E) = 0$ e quindi $\mu(A \cup E) \leq \alpha$.
Unicità.
Supponiamo che
$$\mu = \mu_1 + \lambda_1 = \mu_2 + \lambda_2\,,$$
cosiché si abbia
$$\mu_1 - \mu_2 = \lambda_2 - \lambda_1\,.$$
Ovviamente si ha che $\mu_1 - \mu_2 = 0$ su ogni insieme E con $\mathrm{cap}_p(E) = 0$. D'altronde esistono $A_1, A_2 \subset \Omega$ tali che $\mathrm{cap}_p(A_1)$ $=\mathrm{cap}_p(A_2) = 0$, con $\lambda_1 = \mu\,|_{A_1}$ e $\lambda_2 = \mu\,|_{A_2}$. Si osservi che $\lambda_1(A_1^c) = \lambda_2(A_2^c) = 0$.
Abbiamo così :
$$(\lambda_2 - \lambda_1)((A_1 \cup A_2)^c) = \lambda_2(A_1^c \cap A_2^c) - \lambda_1(A_1^c \cap A_2^c) = 0$$
dunque
$$(\lambda_2 - \lambda_1)(E) = (\lambda_2 - \lambda_1)(E \cap (A_1 \cup A_2)) \quad \forall\, E \subset \Omega\,.$$
Dalla σ-subadditività abbiamo che $\mathrm{cap}_p(A_1 \cup A_2) = 0$, quindi
$$(\lambda_2 - \lambda_1)(E) = (\lambda_2 - \lambda_1)(E \cap (A_1 \cup A_2)) = (\mu_1 - \mu_2)(E \cap (A_1 \cup A_2)) = 0 \quad \forall\, E \subset \Omega\,,$$
e dunque $\lambda_1 = \lambda_2$. Allora anche $\mu_1 = \mu_2$. ■

Capitolo 3

Non esistenza di soluzioni nel caso $\mu \notin \mathcal{M}_0(\Omega)$

Abbiamo visto nel precedente capitolo (Teorema 2.15) che data una misura regolare μ la si può sempre decomporre in $\mu = \mu_a + \mu_s$ dove μ_a è assolutamente continua rispetto alla p-capacità e μ_s è singolare rispetto alla p-capacità. Abbiamo inoltre visto un risultato di esistenza per le soluzioni del problema

$$\begin{cases} A(u(x)) + g(x, u(x), \nabla u(x)) = \mu \quad \text{in } \Omega \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad g(x, u(x), \nabla u(x)) \in L^1(\Omega)\,, \end{cases}$$

nel caso in cui $\mu_s = 0$; supponiamo ora che $\mu_a = 0$, cioè la nostra miura è tutta concentrata in un insieme di p-capacità nulla. Si può tentare un approccio simile a quello del capitolo precedente scegliendo una successione di funzioni $\{f_n\} \in L^\infty(\Omega)$ che approssimi μ_s nella topologia $*$-debole di $L^\infty(\Omega)$; ne segue che f_n è limitata in $L^1(\Omega)$ e dunque che la successione delle soluzioni u_n del problema corrispondnte è limitata in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Allora, pur di passare a sottosuccessioni,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } W_0^{1,p}(\Omega)\,.$$

Quali informazioni si possono trarre sulla u? Il Teorema 3.4 ci farà vedere cosa succede alla u in questo caso.
Intoduciamo ora delle funzioni cut-off e dimostriamone alcune proprietà che saranno utili in seguito.

Notazione. Per non appesantire la notazione useremo la seguente convenzione: indicheremo con $\omega(n,\delta)$ ogni quantità tale che

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to+\infty}|\omega(n,\delta)| = 0.$$

Se una quantità non dovesse dipendere da uno dei due parametri esso non comparirà come argomento di ω. In generale l'ordine di comparizione degli argomenti sarà inverso rispetto all'ordine con cui vengono effettuati i limiti. Nel caso in cui una delle variabili compaia solo come parametro verrà indicato con il corrispondente indice.

3.1 Le funzioni cut-off

Lemma 3.1 Sia $\mu_s \in \mathcal{M}_s(\Omega)$ una misura regolare singolare rispetto alla p-capacità, decomposta in

$$\mu_s = \mu_s^+ - \mu_s^- \,;$$

μ_s^+ concentrata su E^+ e μ_s^- concentrata su E^-, con $\text{cap}_p(E^+)$ $=\text{cap}_p(E^-) = 0$. Allora $\forall\delta > 0$ esistono due insiemi compatti $K_\delta^+ \subset E^+$ e $K_\delta^- \subset E^-$ tali che:

$$\mu_s^+(E^+\backslash K_\delta^+) \leq \delta \qquad \mu_s^-(E^-\backslash K_\delta^-) \leq \delta \tag{3.1}$$

ed esistono due funzioni ψ_δ^+ , $\psi_\delta^- \in C_0^\infty(\Omega)$ tali che

$$0 \leq \psi_\delta^+ \leq 1 \qquad 0 \leq \psi_\delta^- \leq 1 \quad \text{su}\,\Omega \tag{3.2}$$

$$\psi_\delta^+ \equiv 1 \quad \text{su } K_\delta^+ \qquad \psi_\delta^- \equiv 1 \quad \text{su } K_\delta^- \tag{3.3}$$

$$\text{supp}(\psi_\delta^+) \cap \text{supp}(\psi_\delta^+) = \emptyset \tag{3.4}$$

$$\int_\Omega |\nabla\psi_\delta^+|^p dx \leq \delta \qquad \int_\Omega |\nabla\psi_\delta^-|^p dx \leq \delta\,. \tag{3.5}$$

Inoltre siano $\lambda_n^\oplus$ e $\lambda_n^\ominus$ due successioni di funzioni $L^\infty(\Omega)$ non negative che convergono rispettivamrnte verso μ_s^+ e μ_s^- nella topologia stretta delle misure, allora si ha:

$$\int_\Omega \psi_\delta^- d\lambda_n^\oplus = \omega(\delta, n) \qquad \int_\Omega \psi_\delta^- d\mu^+ \leq \delta \tag{3.6}$$

$$\int_\Omega \psi_\delta^+ d\lambda_n^\ominus = \omega(\delta, n) \qquad \int_\Omega \psi_\delta^+ d\mu^- \leq \delta \tag{3.7}$$

$$\int_\Omega (1-\psi_\delta^+\psi_\eta^+)d\lambda_n^\oplus = \omega(\eta,\delta,n) \qquad \int_\Omega (1-\psi_\delta^+\psi_\eta^+)d\mu^+ = \eta+\delta \tag{3.8}$$

$$\int_\Omega (1-\psi_\delta^-\psi_\eta^-)d\lambda_n^\ominus = \omega(\eta,\delta,n) \qquad \int_\Omega (1-\psi_\delta^-\psi_\eta^-)d\mu^- = \eta+\delta \tag{3.9}$$

Dimostrazione. Sia δ un numero positivo fissato. Data la regolarità delle misure μ_s^+ e μ_s^-, esistono due sottoinsiemi compatti di Ω, K_δ^+ e K_δ^+, con

$$K_\delta^+ \subset E^+ \qquad K_\delta^- \subset E^-$$

tali che valga la (3.1). Inoltre , dal fatto che $K_\delta^+ \cap K_\delta^- = \emptyset$ (poiché $E^+ \cap E^- = \emptyset$), esistono due aperti U_δ^+,$U_\delta^- \subset \Omega$, tali che

$$K_\delta^+ \subset U_\delta^+ \qquad K_\delta^- \subset U_\delta^- \qquad U_\delta^+ \cap U_\delta^- = \emptyset.$$

Si osservi che U_δ^- e E^+ non sono necessariamente disgiunti, così come U_δ^+ e E^-. Inoltre, poiché $\text{cap}_p(E^+,\Omega) = \text{cap}_p(E^-,\Omega) = 0$, si ha

$$\text{cap}_p(K_\delta^+,\Omega) = 0 \qquad \text{cap}_p(K_\delta^-,\Omega) = 0$$

che implica in particolare (si veda per esempio [8], Lemma 2.9)

$$\text{cap}_p(K_\delta^+,U_\delta^+) = 0 \qquad \text{cap}_p(K_\delta^-,U_\delta^-) = 0.$$

Allora, dalla definizione di p-capacità di un insieme compatto, esistono due funzioni ψ_δ^+ e ψ_δ^- tali che soddisfano (3.3) e

$$\psi_\delta^+ \in C_0^\infty(U_\delta^+)\,, \qquad \psi_\delta^- \in C_0^\infty(U_\delta^-)\,,$$

$$\int_{U_\delta^+} |\nabla\psi_\delta^+|^p dx \le \delta \qquad \int_{U_\delta^-} |\nabla\psi_\delta^-|^p dx \le \delta\,,$$

$$0 \le \psi_\delta^+ \le 1 \quad \text{su}\, U_\delta^+ \qquad 0 \le \psi_\delta^- \le 1 \quad \text{su}\, U_\delta^-\,.$$

Prolungando ψ_δ^+ e ψ_δ^- su tutto l'aperto Ω in modo che ψ_δ^+ sia nulla su $\Omega\backslash U_\delta^+$ e ψ_δ^- sia nulla su $\Omega\backslash U_\delta^-$, si ottengono le (3.2), (3.4) e (3.5).
Se consideriamo ora la successione $\lambda_n^\oplus$ allora, per ogni $\delta > 0$, si ha

$$\int_\Omega \psi_\delta^- d\lambda_n^\oplus = \int_\Omega \psi_\delta^- d\mu_s^+ + \omega_\delta(n).$$

D'altronde sappiamo dalla (3.1) che

$$0 \le \int_\Omega \psi_\delta^- d\mu_s^+ = \int_{u_\delta^-} \psi_\delta^- d\mu_s^+ \le \mu_s^+(U_\delta^-)$$

$$\leq \mu_s^+(\Omega \backslash U_\delta^+) \leq \mu_s^+(\Omega \backslash K_\delta^+) \leq \mu_s^+(E^+ \backslash K_\delta^+) \leq \delta$$

da cui si deduce la (3.6).
Fissiamo ora δ e η in $\mathbf{R}^+$; si ha

$$0 \leq \int_\Omega (1 - \psi_\delta^+ \psi_\eta^+) d\lambda_n^\oplus = \int_\Omega (1 - \psi_\delta^+ \psi_\eta^+) d\mu_s^+ + \omega_{\delta,\eta}(n)\,;$$

essendo poi $(1 - \psi_\delta^+ \psi_\eta^+)$ una funzione $C^\infty(\Omega)$ nulla su $K_\delta^+ \cap K_\eta^+$ e tale che

$$0 \leq 1 - \psi_\delta^+ \psi_\eta^+ \leq 1 \quad \text{su} \Omega$$

e utilizzando la (3.1), otteniamo:

$$0 \leq \int_\Omega (1 - \psi_\delta^+ \psi_\eta^+) d\mu_s^+ = \int_{\Omega \backslash (K_\delta^+ \cap K_\eta^+} (1 - \psi_\delta^+ \psi_\eta^+) d\mu_s^+ \leq$$

$$\leq \mu_s^+(\Omega \backslash (K_\delta^+ \cap K_\eta^+)) \leq \mu_s^+(\Omega \backslash K_\delta^+) + \mu_s^+(\Omega \backslash K_\eta^+) \leq \delta + \eta.$$

Dunque la (3.8).
Le dimostrazioni della (3.7) e della (3.9) sono analoghe a quelle appena fatte, è sufficiente fare gli stessi ragionamenti sostituendo ψ_δ^-, E^-, K^- e $\lambda^\ominus$ rispettivamente a ψ_δ^+, E^+, K^+ e $\lambda^\oplus$. ∎

Lemma 3.2 Sia $\lambda \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ una misura concentrata in un insieme E di misura nulla. Allora $\forall \delta > 0 \exists \psi_\delta \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che:

$$\int_\Omega |\nabla \psi_\delta|^p dx = \omega(\delta) \quad 0 \leq \psi_\delta \leq 1 \quad \int_\Omega (1 - \psi_\delta) d\lambda = \omega(\delta). \tag{3.10}$$

Dimostrazione. Poiché $\lambda \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ esiste, $\forall \delta > 0$, un insieme compatto $K_\delta \subset E$ tale che $\lambda(E \backslash K_\delta) \leq \delta$. Dato che K_δ è compatto e che $\mathrm{cap}_p(K_\delta) = 0$, esiste la ψ_δ che soddisfa le prime due proprietà della (3.10). Per l'ultima proprietà si ha:

$$0 \leq \int_\Omega (1 - \psi_\delta) d\lambda = \int_{E \backslash K_\delta} (1 - \psi_\delta) d\lambda \leq \lambda(E \backslash K_\delta) \leq \delta.$$

∎

Osservazione 3.3 Dalla (3.10) si deduce che:

1. $\psi_\delta \to 0$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$;
2. $\psi_\delta \to 0$ q.o.
3. $\psi_\delta \to 0$ nella topologia $*$-debole di $L^\infty(\Omega)$.

3.2 Caso $\mu \perp p$-capacità

Possiamo ora affrontare il caso in cui la misura μ sia tutta concentrata in un insieme E di p-capacità nulla, cioè quando $\mu_a = 0$: allora abbiamo il seguente Teorema che ci da un risultato di non esistenza.

Teorema 3.4 *Sia μ una misura in $\mathcal{M}_b(\Omega)$ concentrata in un insieme E di p-capacità nulla e sia $f_n = f_n^{\oplus} - f_n^{\ominus}$ una successione di funzioni in $L^\infty(\Omega)$ tale che $f_n^{\oplus}$ converga verso μ^+ e $f_n^{\ominus}$ converga verso μ^- nella topologia stretta delle misure. Supponiamo inoltre che $a(x,s,\xi)$ e $g(x,s,\xi)$ soddisfino:*

$$a(x,s,\xi)\cdot\xi \geq |\xi|^p \tag{3.11}$$

$$|a(x,\xi)| \leq \beta\left(|\xi|^{p-1} + +k(x)\right) \tag{3.12}$$

$$\left(a(x,\xi) - a(x,\eta)\right)(\xi - \eta) > 0 \quad \forall \xi \neq \eta. \tag{3.13}$$

e

$$g(x,s,\xi)s \geq 0 \tag{3.14}$$

$$|g(x,s,\xi)| \leq b(|s|)\left(|\xi|^p + c(x)\right) \tag{3.15}$$

$$g(x,s,\xi)\mathrm{sgn}(s) \geq \rho|\xi|^p \tag{3.16}$$

per quasi ogni $x \in \Omega$, $\forall \xi \in \mathbf{R}^N$ e $\forall s \in \mathbf{R}$. Sia u_n una successione di funzioni che risolve il problema

$$\begin{cases} A(u_n(x)) + g_n(x,u_n(x),\nabla u_n(x)) = f_n \ \ \textit{in} \ \ \Omega \\ u_n = 0 \ \ \textit{su} \ \ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.17}$$

nel senso

$$\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\cdot\nabla v + \int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)v = \int_\Omega f_n v \qquad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega). \tag{3.18}$$

Allora esiste $k(g,\alpha) > 0$ tale che

$$T_k(u_n) \to 0 \ \ \textit{forte in} \ \ W_0^{1,p}(\Omega).$$

Inoltre

$$u_n \rightharpoonup 0 \text{ in } W_0^{1,p}(\Omega)$$

e

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)\varphi = \int_\Omega \varphi d\mu \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)\,.$$

Dimostrazione. Osserviamo che abbiamo indicato le due successioni di funzioni positive con $f_n^{\oplus}$ e $f_n^{\ominus}$ poiché esse non necessariamente coincidono con la parte positiva e la parte negativa di una successione f_n.
Facendo una stima analoga aquella fatta nel capitolo precedente, otteniamo

$$\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq c \; : \tag{3.19}$$

dalla limitatezza di u_n in $W_0^{1,p}(\Omega)$ sappiamo che è possibile estrarre una sottosuccessione (ancora denotata con u_n), tale che

$$u_n \to u$$

debolmente in $W_0^{1,p}(\Omega)$ e quasi ovunque in Ω.
Inoltre sommando l'informazione della (3.19) con la (3.12), cioè la limitatezza di $a(x,\xi)$ in $(L^{p'}(\Omega))^N$, otteniamo:

$$\exists G \in L^{p'}(\Omega)\, t.c.\; a(x,\nabla u_n) \;\rightharpoonup G \text{ in } L^{p'}(\Omega). \tag{3.20}$$

Passo 1. Scegliamo come funzione test in (3.18) la funzione

$$v = [k - T_k(u_n^+)]\psi_\delta^+;$$

v è una funzione test ammissibile (cioè $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$) in quanto prodotto di $\psi_\delta^+ \in C_0^\infty(\Omega)$ e di $k - T_k(u_n^+) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Otteniamo così :

$$-\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla T_k(u_n^+)\psi_\delta^+ \tag{3.21}$$

$$+\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla\psi_\delta^+[k - T_k(u_n^+)] \tag{3.22}$$

$$+\int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)[k - T_k(u_n^+)]\psi_\delta^+ \tag{3.23}$$

$$= \int_\Omega f_n^{\oplus}[k - T_k(u_n^+)]\psi_\delta^+ \tag{3.24}$$

$$-\int_\Omega f_n^{\ominus}[k - T_k(u_n^+)]\psi_\delta^+ \,. \tag{3.25}$$

Il primo integrale lo portiamo al secondo membro, sfruttiamo l'ellitticità di $a(s,\xi)$, cioè

$$\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\cdot\nabla T_k(u_n^+)\psi_\delta^+ \geq \alpha\int_\Omega |T_k(u_n^+)|^p\psi_\delta^+ dx\,.$$

Per quanto riguarda la (3.23) abbiamo:

$$|(3.23)| \leq \int_{\{0 \leq u_n \leq k\}} g(x, u_n, \nabla u_n)[k - T_k(u_n^+)]\psi_\delta^+ + k \int_{\{-k \leq u_n \leq 0\}} g(x, u_n, \nabla u_n)\psi_\delta^+ \,,$$

se nel primo integrale sfruttiamo la continuità di $g(x, s, \xi)$, e osserviamo che il secondo è negativo in quanto $g(x, s, \xi) \leq 0$, poiché stiamo integrando solo dove $u_n \leq 0$ (sfruttando la (3.14)) e $\psi_\delta^+ \geq 0$, abbiamo

$$|(3.23)| \leq b(k) \int_{\{0 \leq u_n \leq k\}} [k - T_k(u_n^+)]\psi_\delta^+ [d(x) + |\nabla u_n|^p] dx \leq$$

$$b(k) k \int_\Omega d(x)\psi_\delta^+ + b(k) k \int_{\{0 \leq u_n \leq k\}} |\nabla u_n|^p \psi_\delta^+ \,.$$

Scegliendo ora k tale che $b(k) \cdot k \leq \frac{\alpha}{2}$ e osservando che il primo integrale è un $\omega(\delta)$, si ha

$$|(3.23)| \leq \frac{\alpha}{2} \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p \psi_\delta^+ + \omega(\delta) \,.$$

Consideriamo la (3.22): dalla (3.20) abbiamo che

$$\int_\Omega a(x, \nabla u_n) \cdot \nabla \psi_\delta^+ [k - T_k(u_n^+)] \to \int_\Omega G \nabla \psi_\delta^+ [k - T_k(u_n^+)]$$

dove $G \in L^{p'}(\Omega)$, $k - T_k(u_n^+) \in L^\infty(\Omega)$ e, dalla (3.5), $\|\psi_\delta^+\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \delta$: allora

$$\int_\Omega G \cdot \nabla \psi_\delta^+ [k - T_k(u_n^+)] = \omega(\delta) \,.$$

Andiamo a vedere come si comportano gli ultimi due integrali:

$$\int_\Omega f_n^\oplus [k - T_k(u_n^+)]\psi_\delta^+ \geq 0$$

e dalle proprietà delle funzioni cut-off

$$-\int_\Omega f_n^\ominus [k - T_k(u_n^+)]\psi_\delta^+ = \omega(n, \delta).$$

Mettendo insieme tutte queste informazioni otteniamo

$$\alpha \int_\Omega |\nabla T_k(u_n^+)|^p \psi_\delta^+ \leq \frac{\alpha}{2} \int_\Omega |\nabla T_k(u_n^+)|^p \psi\delta^+ + \omega(n, \delta)$$

cioè

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n^+)|^p \psi_\delta^+ = \omega(n, \delta) \,. \tag{3.26}$$

Passo 2. A questo punto vogliamo dimostrare che anche

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n^-)|^p \psi_\delta^- = \omega(n,\delta)\,.$$

Questa volta scegliamo come funzioni test in (3.18) $v = [k + T_k(u_n^-)]\psi_\delta^-$ che è una funzione test ammissibile per le osservazioni del passo precedente. Abbiamo così :

$$\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\cdot \nabla T_k(u_n^-)\psi_\delta^- + \tag{3.27}$$

$$\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\cdot \nabla \psi_\delta^-[k + T_k(u_n^-)] + \tag{3.28}$$

$$\int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)[k + T_k(u_n^-)]\psi_\delta^- = \tag{3.29}$$

$$\int_\Omega f_n^\oplus [k + T_k(u_n^-)]\psi_\delta^- \tag{3.30}$$

$$-\int_\Omega f_n^\ominus [k + T_k(u_n^-)]\psi_\delta^-\,. \tag{3.31}$$

Per la (3.30) vale una stima analoga a quella fatta per la (3.25), dunque

$$\int_\Omega f_n^\oplus [k + T_k(u_n^-)]\psi_\delta^- = \omega(n,\delta)$$

mentre l'integrando della (3.31) è una funzione positiva, allora

$$-\int_\Omega f_n^\ominus [k + T_k(u_n^-)]\psi_\delta^- \leq 0.$$

Per quanto riguarda la (3.28) abbiamo, come nel primo passo,

$$\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\cdot \nabla \psi_\delta^-[k + T_k(u_n^-)] \to \int_\Omega G\cdot \nabla\psi_\delta^-[k - T_k(u^-)]\,,$$

con $G \in L^{p'}(\Omega)$, $[k - T_k(u^-)] \in L^\infty(\Omega)$ e $\psi_\delta^- \in W_0^{1,p}(\Omega)$; si ha allora tramite la disuguaglianza di Hölder e la (3.5)

$$\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla \psi_\delta^-[k + T_k(u_n^-)] = \omega(n,\delta)\,.$$

Passiamo alla (3.29):

$$\int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)[k + T_k(u_n^-)]\psi_\delta^- =$$

$$\int_{\{-k\le u_n\le 0\}} g(x,u_n,\nabla u_n)\psi_\delta^-[k+T_k(u_n^-)] + k\int_{\{u_n\ge 0\}} g(x,u_n,\nabla u_n)\psi_\delta^- ;$$

il secondo integrale è positivo grazie alla (3.14), mente il primo si può stimare in questa maniera:

$$\int_{\{-k\le u_n\le 0\}} |g(x,u_n,\nabla u_n)\psi_\delta^-[k+T_k(u_n^-)]| \le 2k\int_{\{-k\le u_n\le 0\}} b(k)[d(x)+|\nabla u_n|^p]\psi_\delta^-$$

$$\le 2kb(k)\int_\Omega d(x)\psi_\delta^- + 2k\cdot b(k)\int_{\{-k\le u_n\le 0\}}\psi_\delta^-|\nabla u_n^-|^p$$

$$\le \omega(n) + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |T_k(u_n^-)|^p\psi_\delta^- .$$

Allora

$$|(3.29)| \le \omega(n) + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |T_k(u_n^-)|^p\psi_\delta^-$$

e dunque

$$(3.29) \ge -\frac{\alpha}{2}\int_\Omega |T_k(u_n^-)|^p\psi_\delta^- + \omega(n) .$$

Concludiamo così il secondo passo: grazie all'ellitticità di $a(x,\xi)$ abbiamo che

$$\frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla T_k(u_n^-)|^p\psi_\delta^- \le \omega(n,\delta). \tag{3.32}$$

Passo 3. In questo caso sceglieremo $v = T_k(u_n^+)(1-\psi_\delta^+)$ come funzione test in (3.18) (si osservi che v è una funzione test ammissibile perché prodotto di $T_k(u_n) \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ e $(1-\psi_\delta^+) \in C^\infty(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$). Ne segue

$$\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla T_k(u_n^+)(1-\psi_\delta^+) \tag{3.33}$$

$$-\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla\psi_\delta^+ T_k(u_n^+) + \tag{3.34}$$

$$\int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)T_k(u_n^+)(1-\psi_\delta^+) = \tag{3.35}$$

$$\int_\Omega f_n^\oplus T_k(u_n^+)(1-\psi_\delta^+) \tag{3.36}$$

$$-\int_\Omega f_n^\ominus T_k(u_n^+)(1-\psi_\delta^+) . \tag{3.37}$$

Per la (3.34) facciamo le stesse considerazioni fatte nei due precedenti passi, e otteniamo che

$$\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla\psi_\delta^+(1-\psi_\delta^+) = \int_\Omega G\cdot\nabla\psi_\delta^+(1-\psi_\delta^+) + \omega(n)$$

e l'integrale al secondo membro è piccolo grazie alla disuguaglianza di Hölder e alla (3.3). Inoltre la (3.37) è negativa, quindi si può togliere.

$$\int_\Omega f_n^{\oplus} T_k(u_n^+)(1-\psi_\delta^+) \leq k\int_\Omega f_n(1-\psi_\delta^+) = \int_\Omega (1-\psi_\delta^+)d\mu^+ + \omega(n)$$

e dal Lemma (3.2) si ottiene quindi la stima per la (3.36):

$$\int_\Omega f_n^{\oplus} T_k(u_n^+)(1-\psi_\delta^+) = \omega(n,\delta).$$

Siccome nella (3.35) l'integrale è inteso solo dove le u_n sono positive, grazie all'ipotesi di segno sulla $g(x,s,\xi)$ abbiamo:

$$\int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)T_k(u_n^+)(1-\psi_\delta^+) \geq 0$$

Allora dall'ellitticità di $a(x,\xi)$,

$$\alpha\int_\Omega |\nabla T_k(u_n^+)|^p(1-\psi_\delta^+) \leq \omega(n,\delta). \tag{3.38}$$

Passo 4. Sia ora $v = T_k(u_n^-)(1-\psi_\delta^-)$ la nostra nuova funzione test per il problema (3.18) (ammissibile per le stesse osservazioni del passo precedente). Dunque:

$$\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla T_k(u_n^-)(1-\psi_\delta^-) \tag{3.39}$$

$$-\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla\psi_\delta^- T_k(u_n^-)+ \tag{3.40}$$

$$\int_\Omega g(x,u_n,\nabla u_n)T_k(u_n^-)(1-\psi_\delta^-) = \tag{3.41}$$

$$\int_\Omega f_n^{\oplus} T_k(u_n^-)(1-\psi_\delta^-) \tag{3.42}$$

$$-\int_\Omega f_n^{\ominus} T_k(u_n^-)(1-\psi_\delta^-)\,. \tag{3.43}$$

Possiamo riscrivere tutto in questa maniera: usiamo sulla (3.40) la stessa stima fatta al passo precedente sul termine corrispondente e portiamo $\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\nabla T_k(u_n^-)(1-\psi_\delta^-)$ al secondo membro e $-\int_\Omega f_n^{\ominus} T_k(u_n^-)(1-\psi_\delta^-)$ al primo. Allora:

$$\omega(n,\delta)+$$

$$\int_\Omega g(x, u_n, \nabla u_n) T_k(u_n^-)(1 - \psi_\delta^-) \tag{3.44}$$

$$\int_\Omega f_n^\ominus T_k(u_n^-)(1 - \psi_\delta^-) = \tag{3.45}$$

$$\int_\Omega f_n^\oplus T_k(u_n^-)(1 - \psi_\delta^-) \tag{3.46}$$

$$-\int_\Omega a(x, \nabla u_n) \cdot \nabla T_k(u_n^-)(1 - \psi_\delta^-)\,. \tag{3.47}$$

Ora, la (3.46) è positiva, poiché è positivo l'integrando; la (3.44) è negativa ancora per l'ipotesi di segno fatta su $g(x, s, \xi)$ (si osservi che l'integrale è inteso solo dove le u_n sono negative, ma per definizione $u_n^- \geq 0$). Consideriamo ora la (3.45):

$$\left| \int_\Omega f_n^\ominus T_k(u_n^-)(1 - \psi_\delta^-) \right| \leq$$

$$k \cdot \int_\Omega f_n^\ominus (1 - \psi_\delta^-) \to k \int_\Omega (1 - \psi_\delta^-) d\lambda^+ = \omega(\delta)$$

grazie al Lemma (3.2). Osservando che nell'ultimo integrale il segno è quello giusto per sfruttare l'ellitticità della $a(x, \xi)$, abbiamo che

$$\alpha \cdot \int_\Omega |T_k(u_n^-)|^p (1 - \psi_\delta^-) \leq \omega(n, \delta)\,, \tag{3.48}$$

che conclude il passo 4.
Mettiamo ora insieme le informazioni ottenute nei quattro passi e per sottrazione tra la (3.38) e la (3.26) e tra la (3.48) e la (3.32) otteniamo

$$\int_\Omega |T_k(u_n)|^p \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Passo 5. Dimostriamo ora l'ultima parte del Teorema. Per fare ciò osserviamo che dalla convergenza forte in $W_0^{1,p}(\Omega)$ della $T_k(u_n)$ verso 0 si ha che $\nabla u_n \to 0$ q.o. e quindi se ne deduce che $G \equiv 0$.
Sia ora $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ la nostra funzione test:

$$\int_\Omega a(x, \nabla u_n) \nabla \varphi + \int_\Omega g(x, u_n, \nabla u_n) \varphi = \int_\Omega f_n \varphi\,.$$

Abbiamo osservato che $G \equiv 0$, quindi

$$\int_\Omega a(x, \nabla u_n) \nabla \varphi = \omega(n)$$

e per ipotesi

$$\int_\Omega f_n \varphi = \int_\Omega \varphi d\lambda + \omega(n).$$

Per sottrazione si ottiene quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g(x, u_n, \nabla u_n)\varphi = \int_\Omega \lambda\varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1.$$

Questo conclude la dimostrazione del Teorema. ∎

3.3 Il caso generale

Enunciamo ora un Teorema, di cui non daremo la dimostrazione, in cui verranno date condizioni sulla $g(s)$ per le quali la soluzione del problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,\nabla u) + g(u)|\nabla u|^2 = \mu & \text{in} \quad \Omega \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 & \text{su} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

esiste sia nel caso il cui $\mu = \mu_0 + \lambda$ è tale che $\lambda \neq 0$ che in quello in cui $\lambda = 0$.

Teorema 3.5 *Sia $a(x,\xi)$ una funzione di Charatheodory tale che, per q.o $x \in \Omega$ e $\forall \xi \in \mathbf{R}^N$*

$$a(x,\xi)\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^2 \quad \alpha > 0$$

$$|a(x,\xi)| \leq \beta\,(|\xi| + k(x)) \quad k(x) \in L^2(\Omega)\,,\ \beta > 0$$

$$(a(x,s,\xi) - a(x,s,\eta))\,(\xi - \eta) > 0 \quad \forall \xi \neq \eta$$

e sia $g(s)$ una funzione continua tale che

$$g(s)s \geq 0 \quad \forall s \in \mathbf{R}\,,$$

sia inoltre μ una misura in $\mathcal{M}_b(\Omega)$ decomposta in $\mu = \mu_0 + \lambda = f - \mathrm{div}(F) + \lambda$, dove $f \in L^1(\Omega)$, $F \in (L^2(\Omega))^N$ e $\lambda \perp cap_2$. Consideriamo la successione μ_n di approssimanti di μ tale che:

$$\begin{cases} \mu_n = \mu_{0\,n} + \lambda_n = f_n - \mathrm{div}(F_n) + \lambda_n\,, \\ \mu_{0\,n} \geq 0\,, \quad \lambda_n \geq 0 \\ \mu_n \in L^2(\Omega) \text{ e } \exists C > 0 \text{ tale che } \|\mu_n\|_{L^1(\Omega)} \leq C\,, \forall n > 0 \\ f_n \in L^2(\Omega) \text{ e } f_n \rightharpoonup f \text{ in } L^1(\Omega) \\ F_n \in (H^1(\Omega))^N \text{ e } F_n \to F \text{ in } (L^2(\Omega))^N\,, \\ \lambda_n \in L^2(\Omega)\,,\ \lambda_n \to \lambda \text{ nella topologia stretta di } \mathcal{M}_b(\Omega). \end{cases}$$

Sia ora u_n *la successione di soluzioni del problema*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,\nabla u_n) + g(u_n)|\nabla u_n|^2 = \mu_n & \textit{in} \quad \Omega \\ u_n = 0 & \textit{su} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

se $\mathcal{U}$ *e* $\mathcal{G}$ *sono due misure positive tali che*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega g(u_n)|\nabla u_n|^2\varphi = \int_\Omega \varphi d\mathcal{G} \quad \forall\varphi\in C_0(\Omega)\,,$$

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\int_\Omega \chi_{\{k<u<2k\}}a(x,\nabla u)\nabla u\nabla\varphi = \int_\Omega \varphi d\mathcal{U} \quad \forall\varphi\in C_0(\Omega)\,.$$

Allora abbiamo:

$$\mathcal{G} = g(u)|\nabla u|^2 + \lambda - \mathcal{U}$$

e

$$g(u_n)|\nabla u_n|^2 \to \mathcal{G}$$

$$\frac{1}{k}\chi_{\{k<u<2k\}}a(x,u,\nabla u)\nabla u \to \mathcal{U}\,,$$

dove le convergenze sono intese nella topologia stretta delle misure (positive). Inoltre:

1. *Se*

   $$\int_0^{+\infty} g(s) < +\infty$$

   allora

   $$g(u)|\nabla u|^2 = \mathcal{G} \quad e \quad \mathcal{U} = \lambda$$

2. *Se invece*

   $$\int_0^{+\infty} g(s) = +\infty$$

   e se $a(x,\xi)$ *soddisfa*

   $$|a(x,s,\xi)| \le \beta|\xi| \quad \forall\xi\in(\mathbf{R})^N\,, \textit{per q.o. } x\in\Omega\ \forall s\in\mathbf{R},$$

   allora

   $$\mathcal{U} = 0 \quad e\ \mathcal{G} = g(u)|\nabla u|^2$$

ed esiste una soluzione debole del problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u) + g(u)|\nabla u|^2 = \mu & \textit{in } \Omega \\ u = 0 \textit{ su } \partial\Omega \end{cases}$$

se e solo se $\mu\in\mathcal{M}_0(\Omega)$.

Dimostrazione. Si veda [10], Teorema 2.13, pag 17 ∎

3.4 Singolarità eliminabili

In questo paragrafo vogliamo arrivare al risultato di non esistenza di soluzioni, visto nei precedenti paragrafi, da un altro punto di vista: prendendo come spunto il lavoro di Brezis e Nirenberg [6], si vedrà come una funzione regolare soluzione del problema

$$-\mathrm{div}(A(x,u)\nabla u) + g(u)|\nabla u|^2 = \mu$$

su $\Omega \backslash K$, con $\mathrm{cap}_2(K) = 0$ sia regolare su tutto Ω, cioè, sotto ipotesi opportune, come una singolarità in un insieme di 2-capacità nulla sia eliminabile.

Teorema 3.6 *Sia $K \subset \Omega$ un insieme compatto con $cap_2(K,\Omega) = 0$ e sia u una funzione regolare su $\Omega \backslash K$ tale che:*

$$-\mathrm{div}(A(x,u)\nabla u) + \psi(x,u,\nabla u) = 0\,, \tag{3.49}$$

con $\psi(x,s,\xi)$ regolare e $A(x,u)$ matrice uniformemente ellittica, cioè:

$$\exists\, c_0\,,\, C_0 > 0\,:\, c_0|\xi|^2 \leq A(x,s)\xi_i \cdot \xi_l \leq C_0|\xi|^2 \quad \forall x \in \mathbf{R}\; \forall u \in \mathbf{R}\; \forall \xi \in \mathbf{R}^n, \tag{3.50}$$

e chiamiamo

$$Lu = \mathrm{div}(A(x,u)\nabla u)\,.$$

Inoltre supponiamo che la $\psi(x,s,\xi)$ soddisfi:

1. *Per ogni m>0, $\exists A_m$ tale che dove $|s| \leq m$ si ha*

$$|\psi(x,s,\xi)| \leq A_m(1+|\xi|^2) \tag{3.51}$$

2. *$\exists\, M\, \alpha\, \in \mathbf{R}^+$ tali che:*

$$(\mathrm{sign}s)\psi(x,s,\xi) \geq \alpha|\xi|^2 - h^2(|s|) \quad \textit{dove } |s| > M \tag{3.52}$$

con $h \in C^1([M,+\infty[)$ tale che:

$$h(s) \geq \varepsilon_0 > 0 \qquad \int_M^{+\infty} \frac{ds}{h(s)} = \infty \quad \limsup_{s\to+\infty} \frac{h'(s)}{h(s)} < \frac{\alpha}{2C_0}. \tag{3.53}$$

Allora u è regolare su tutto Ω.

Esempio 3.7 Grazie al Teorema 3.6 si possono studiare le seguenti equazioni:

$$-\Delta u + u|\nabla u|^2 = f(x)$$

e

$$-\Delta u + \frac{u}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}|\nabla u|^2 + c(x)u = f(x) + \gamma u^2$$

con $f(x)$ e $c(x)$ regolari e $\gamma \in \mathbf{R}$, che sono due equazioni base nell'ambito dei problemi affrontati negli ultimi due capitoli. Si scelga infatti nel primo caso

$$\psi(x, s, \xi) = u|\xi|^2 - f(x)$$

e nel secondo

$$\psi(x, s, \xi) = \frac{s}{(1+s^2)^{\frac{1}{2}}}|\xi|^2 + c(x)s - f(x) - \gamma s^2 \,.$$

In entrambi i casi ci troviamo nelle stesse ipotesi dei Teoremi dei paragrafi precedenti.

Vediamo ora un altro esempio, questa volta "in negativo".

Esempio 3.8 Se consideriamo l'equazione

$$-\triangle u + |\nabla u|^2 = h(u)^2 \quad \text{in } B_1(0)\backslash\{0\}\,,$$

con $h(s) \cong \frac{1}{\varepsilon} s \log^{1+\varepsilon} s$ per s grande e $\forall \varepsilon > 0$. Allora $u = e^{r^{-\frac{1}{\varepsilon}}}$ risolve il problema ed ha evidentemente una singolarità nell'origine. Infatti $h(s)$ non soddisfa la terza delle (3.53), cioè:

$$\int^{+\infty} \frac{1}{h(s)} < +\infty\,.$$

Nella dimostrazione giocano un ruolo fondamentale due proprietà della $u(x)$:

1. $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)\,;$
2. $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\,.$

Per ottenerle esplicitamente useremo il seguente Lemma, di cui diamo di seguito la dimostrazione:

Lemma 3.9 Sia $K \subset \Omega \subset \mathbf{R}^N$, con $N \geq 2$, un compatto tale che $\mathrm{cap}_2(K) = 0$. Sia v localmente lipschitziana in $\Omega \backslash K$ ($v \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega \backslash K)$), $v \geq M > 0$ che soddisfi

$$-Lv + \alpha |\nabla v|^2 \leq h(v)^2 \quad \text{in } \Omega \backslash K, \tag{3.54}$$

dove $\alpha > 0$ e $h \in C^1[M, +\infty[$ e soddisfa le tre condizioni della (3.53).
Allora

$$v \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega) \bigcap H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\,.$$

Dimostrazione. Sappiamo che $\mathrm{cap}_2(K) = 0$ quindi, dalla definizione di insieme di 2-capacità nulla, esiste una successione $\xi_j \in C^\infty_0(\Omega)$ tale che:

$$0 \leq \xi_j \leq 1 \qquad \xi_j \equiv 1 \text{ su } K \qquad \int_\Omega |\nabla \xi_j|^2 \to 0 \text{ per } j \to +\infty\,.$$

Inoltre $\|\xi_j\|_{L^2(\Omega)} \to 0$. Scegliamo $\eta_j = 1 - \xi_j$.
Pur di restrigere Ω, possiamo assumere che $v \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}$ vicino e fino alla frontiera di Ω. Definiamo

$$\sigma(s) = \int_M^s \frac{dt}{h(t)} \quad \forall t \geq M\,.$$

Sia ora χ_ε una funzione tale che $\chi_\varepsilon(s) = 0\ \forall s \leq 0$, $\chi_\varepsilon(s) = 1 \forall s \geq \varepsilon$, e in $(0, \varepsilon)$ sia regolare e crescente.
Chiamiamo $t_0 = \max\limits_{x \in \partial\Omega} v(x)$, allora $\forall t \geq t_0$ scegliamo come funzione test per l'equazione (3.54):

$$z = \frac{\eta_j^2 \chi_\varepsilon(v - t)}{h(v)^2}\,.$$

Si oseervi che z è prodotto di $\eta_j^2 \in W^{1,p}_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\chi_\varepsilon(v - t) \in L^\infty(\Omega)$ e $\frac{1}{h(v)^2} \in L^\infty(\Omega)$ (essendo per ipotesi $h(s) \geq \varepsilon_0 > 0$): dunque è una buona funzione test. Sostituendo si ottiene

$$\int_\Omega A(x, v)\nabla v \cdot \nabla z + \alpha \int_\Omega |\nabla v|^2 z \leq \int_\Omega h(v)^2 z\,.$$

Portiamo primo integrale al secondo membro e scriviamo l'equazione precedente esplicitamente

$$\alpha \int_\Omega |\nabla v|^2 \frac{\eta_j^2 \chi_\varepsilon(v - t)}{h(v)^2} \leq \int_\Omega h(v)^2 \frac{\eta_j \chi_\varepsilon(v - t)}{h(v)^2} -$$

$$\int_\Omega A(x,v)\nabla v\left[2\frac{\eta_j\nabla\eta_j\chi_\varepsilon(v-t)}{h(v)^2}+\frac{\eta_j^2\chi_\varepsilon'(v-t)v_{x_l}}{h(v)^2}+2\frac{\eta_j^2\chi(v-t)v_{x_l}}{h(v)^2}\cdot\frac{h'(v)}{h(v)}\right]. \tag{3.55}$$

Chiamiamo $\varpi(t)=\text{mis}\{x\in\Omega\backslash K\ :v(x)>t\}$; allora

$$\int_\Omega \eta_j\chi_\varepsilon(v-t)\leq\varpi(t)\,,$$

inoltre dalla scelta di χ_ε si ha che $\chi_\varepsilon'\geq 0$, quindi

$$\alpha\int_\Omega|\nabla v|^2\frac{\eta_j^2\chi_\varepsilon'(v-t)}{h(v)^2}\geq 0\,.$$

Allora

$$\alpha J\leq\varpi(t)-2\int_\Omega\alpha_{i\,l}v_{x_i}\frac{\eta_j|\nabla\eta_j|\chi_\varepsilon(v-t)}{h(v)^2}-2\int_\Omega\alpha_{i\,l}\frac{\eta_j^2\chi(v-t)|\nabla v|^2}{h(v)^2}\cdot\frac{h'(v)}{h(v)}\,,$$

essendo

$$J=\int_\Omega\eta_j^2\chi_\varepsilon(v-t)\frac{|\nabla v|^2}{h(v)^2}\,,$$

che, sfruttando l'ellitticità uniforme di $A(x,u)$, diventa

$$\alpha J\leq\varpi(t)+2C_0\int_\Omega\nabla v\cdot\nabla\eta_j\frac{\eta_j\chi_\varepsilon(v-t)}{h(v)^2}+2C_0\int_\Omega\frac{\eta_j^2\chi(v-t)|\nabla v|^2}{h(v)^2}\cdot\frac{h'(v)}{h(v)}\,.$$

Dalla terza proprietà della (3.53) otteniamo:

$$2C_0\frac{h'(s)}{h(s)}\leq\alpha'<\alpha \text{ per } s\geq t_1>t_0$$

quindi portando il terzo integrale al primo membro abbiamo

$$(\alpha-\alpha')J\leq\varpi(t)+2C_0\int_\Omega v_{x_i}\frac{\eta_j|\nabla\eta_j|\chi_\varepsilon(v-t)}{h(v)^2}\,.$$

A questo punto sfruttando la disuguaglianza di Young, con una scelta opportuna dei coefficienti, e notando che $\chi_\varepsilon^2\leq\chi_\varepsilon$ (essendo $\chi_\varepsilon\leq 1$), si ottiene

$$(\alpha-\alpha')J\leq\varpi(t)+\frac{(\alpha-\alpha')}{2}\int_\Omega\frac{\eta_j^2\chi_\varepsilon(v-t)|\nabla v|^2}{h^2(v)}+C(\alpha,\alpha')\int_\Omega\frac{|\nabla\xi_j|^2}{h^2(v)}\,,$$

dove l'ultimo termine tende a zero poiché più piccolo di $\frac{C(\alpha,\alpha')}{\varepsilon^2}\int_\Omega |\nabla \xi_j|^2$ che, a sua volta, tende a zero per $j \to +\infty$ per definizione di χ_j; inoltre $\eta_j \to 1$ quasi ovunque. Allora notando che

$$\frac{|\nabla v|^2}{h^2(v)} = |\nabla \sigma(v)|^2 \,,$$

si ottiene

$$\frac{(\alpha-\alpha')}{2}\int_{\Omega\setminus K} \chi_\varepsilon(v-t)|\nabla\sigma(v)|^2 \leq C\nu(\sigma(t))\,,$$

dove

$$\nu(s) = \mathrm{mis}\{x \in \Omega\setminus K \,:\, \sigma(v(x)) > s\}\,;$$

facendo tendere ε a zero abbiamo

$$\int_{(\Omega\setminus K)\cap(\sigma(v)>s)} |\nabla\sigma(v)|^2 \leq C\nu(s) \quad \forall s \geq s_1\,, \quad s_1 = \sigma(t_1)\,.$$

Dunque

$$\int_{\Omega\setminus K} |\nabla(\sigma(v)-s)^+|^2 \leq C\nu(s).$$

Enunciamo due Lemmi che useremo per terminare la prova del Lemma 3.9:

Lemma 3.10 Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^N, n \geq 2$, $K \subset \Omega$ compatto di p-capacità nulla e $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega\setminus K)$ con

$$\int_{\Omega\setminus K} |\nabla u|^2 < +\infty\,.$$

Allora $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Lemma 3.11 Sia $u \in H^1(\Omega)$ tale che $|u| \leq C_1$ su $\partial\Omega$ e

$$\int_{|u|>s} |\nabla u|^2 \leq C\rho^a(s) \quad \forall s \geq s_1 \geq C_1$$

dove

$$\rho(s) = \mathrm{mis}\{x \in \Omega \,:\, |u(x)| > s\} \quad \text{ e } \quad a > 1 - \frac{2}{N}\,.$$

Allora $u \in L^\infty(\Omega)$.

Le dimostrazioni di questi due Lemmi verranno date alla fine del capitolo. Dal Lemma 3.11 segue (in questo caso $a = 1$) che $\nu(s)$ è limitata: ma dalla seconda delle ipotesi sulla $h(t)$ sappiamo che

$$\int_M^{+\infty} \frac{dt}{h(t)} = \infty .$$

Allora v deve essere necessariamente limitata.
Ci manca di dimostrare che $v \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.
Sia $K \subset A$, $\overline{A} \subset \Omega$, A aperto e sia τ_j una successione di funzioni così definita:

$$\tau_j = \theta(1 - \xi_j) \quad \theta \in C_0^\infty(\Omega) \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad \theta \equiv 1 \text{ su } A$$

e le ξ_j sono quelle usate precedentemente. Moltiplichiamo ora la (3.54) per τ_j^2 e integriamo su Ω: abbiamo così

$$\alpha \int_\Omega \tau_j^2 |\nabla v|^2 \leq \int_\Omega \tau_j^2 h(v)^2 + \int_\Omega \tau_j^2 Lv .$$

Dato che $h(t) \in C^1([M, +\infty[)$ e v è limitata $\int_\Omega \tau_j^2 h(v)^2 \leq C$; inoltre sfruttando l'ellitticità dell'operatore Lv si ottiene

$$\alpha \int_\Omega \tau_j^2 |\nabla v|^2 \leq C + C_0 \int_\Omega \tau_j |\nabla \tau_j| |\nabla v| ;$$

come prima, l'ultimo integrale si spezza in due pezzi, il primo dei quali viene assorbito al primo membro mentre il secondo è $\int_\Omega |\nabla \tau_j|^2$ che è limitato.
Ne segue che $v \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \backslash K)$ e, dal Lemma 3.10, $v \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. ■

Possiamo ora dimostrare il Teorema 3.6.

Osservazione 3.12 Sia $f(t)$ una funzione di variabile reale, di classe C^2 e convessa, se applichiamo l'operatore L dell'enunciato del Teorema alla funzione $v(x) = f(u(x))$ otteniamo

$$Lv = f'(u)Lu + f''(u)\alpha_{il} u_{x_i} u_{x_l} = f'(u)g + f''(u)\alpha_{il} u_{x_i} u_{x_l}$$

Dalla covessità di $f(t)$ ($f'' \geq 0$) e dall'ellitticità di L si ottiene

$$Lf(u) \geq f'(u)Lu + c_0 f''(u)|\nabla u|^2 \geq f'(u)Lu .$$

Si prenda ora una succesione di funzioni regolari $f_k(u)$ che converge nel senso delle distribuzioni verso u^+. Si ha dunque

$$Lu^+ \geq \mathrm{sign}^+(\mathrm{u}) Lu \qquad \text{(Disuguaglianza di Kato)}$$

Dimostrazione del Teorema 3.6.
Dimostriamo che $u^+ \in L^\infty_{\rm loc}(\Omega)$:
consideriamo $v = M + (u - M)^+$ applicando la disuguaglianza di Kato si ottiene

$$Lv \geq \text{sign}^+(\text{u} - \text{M})Lu = \text{sign}^+(\text{u} - \text{M})\psi = H\,.$$

Dove $u \geq M$ si ha $u \equiv v$, dalla proprietà (3.51) di ψ si ottiene

$$H \geq \alpha|\nabla u|^2 - h^2(u)\ :$$

mentre dove $u \leq M$ $H \equiv 0$, quindi possiamo scrivere che

$$H \geq \alpha|\nabla v|^2 - h^2(v)\,.$$

Ma allora

$$-Lv + \alpha|\nabla v|^2 1 \leq h^2(v)$$

cioè siamo nelle ipotesi del Lemma 3.9. Dunque $v \in L^\infty_{\rm loc}(\Omega)$ e di conseguenza anche $u^+ \in L^\infty_{\rm loc}(\Omega)$.
Analogamente si dimostra che $u^- \in L^\infty_{\rm loc}(\Omega)$. Otteniamo così la prima proprietà di u.
Proviamo ora che $u \in H^1_{\rm loc}(\Omega)$: consideriamo la successione di τ_j con le stesse caratteristiche di quelle usate nella dimostrazione del Lemma precedente, e scegliamo come funzione test in (3.49) $v = \tau_j^2 \sinh(\lambda u)$, con λ da decidere in seguito. Si ottiene così :

$$\int_\Omega A(x,u)\nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega \psi v$$

svolgendo e maggiorando la ψ tramite la (3.51) avendo fissato $m^* = \|u\|_{L^\infty(\text{supp}\theta)}$ si ha

$$\lambda C_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 \cosh(\lambda u)\tau_j^2 \leq A_{m^*}\int_\Omega \left(1 + |\nabla u|^2\right) |\sinh(\lambda u)\tau_j^2$$

$$+2\lambda \int_\Omega \alpha_{i\,j}(x)|\nabla u| \sinh(\lambda u)\tau_j|\nabla \tau_j|$$

sfruttando ora l'ellitticità dell'operatore Lv si ottiene:

$$c_0\lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 \cosh(\lambda u)\tau_j^2 \leq A_{m^*}\int_\Omega \left(1 + |\nabla u|^2\right) |\sinh(\lambda u)|\tau_j^2$$

$$+2C_0 \int_\Omega |\nabla u||\sinh(\lambda u)|\tau_j|\nabla \tau_j|$$

e quindi

$$c_0\lambda\int_\Omega |\nabla u|^2\cosh(\lambda u)\tau_j^2 \le (A_{m^*}+C_0)\int_\Omega |\nabla u|^2\tau_j^2|\sinh(\lambda u)|+$$

$$A_{m^*}\int_\Omega |\sinh(\lambda u)|\tau_j^2 + C'(\lambda)\int_\Omega |\nabla\tau_j|^2|\sinh(\lambda u)|\,.$$

Si può applicare così il seguente lemma:

Lemma 3.13 *Per ogni coppia di numeri* $\alpha,\ \beta\ \in \mathbf{R}^+$ *esistono* $\gamma, \lambda > 0$ *tale che la seguente disequazione sia soddisfatta* $\forall t \in \mathbf{R}$*:*

$$\alpha\lambda\cosh(\lambda t) - \beta|\sinh(\lambda t)| \ge \gamma\,.$$

Dimostrazione del Lemma 3.13
Essendo la funzione $\varphi(t) = \alpha\lambda\cosh(\lambda t) - \beta|\sinh(\lambda t)|$ pari basterà mostrare che il minimo di $\varphi(t)$ sui positivi è strettamente positivo, essendo

$$\varphi(0) = \alpha\gamma > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = +\infty\,.$$

Calcolo dunque $\varphi'(t) = (\alpha\lambda-\beta)e^{\lambda t} - (\alpha\lambda+\beta)e^{-\lambda t}$ che dunque si annulla in $t^* = \frac{1}{2\lambda}\log\frac{\alpha\lambda+\beta}{\alpha\lambda-\beta}$; si ossservi che $\varphi''(t) = \lambda^2\varphi(t)$ è positiva dove è positiva $\varphi(t)$, dunque se $\varphi(t^*) > 0$ ho la tesi.

$$\varphi(t^*) = (\alpha\lambda-\beta)e^{\frac{1}{2}\log\frac{\alpha\lambda+\beta}{\alpha\lambda-\beta}} + (\alpha\lambda+\beta)e^{-\frac{1}{2}\log\frac{\alpha\lambda+\beta}{\alpha\lambda-\beta}}$$

$$= \frac{(\alpha\lambda+\beta)^{\frac{1}{2}}}{(\alpha\lambda-\beta)^{\frac{1}{2}}}(\alpha\lambda-\beta) + \frac{(\alpha\lambda-\beta)^{\frac{1}{2}}}{(\alpha\lambda+\beta)^{\frac{1}{2}}}(\alpha\lambda+\beta)$$

$$= (\alpha^2\lambda^2-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$$

da cui la scelta $\lambda = \frac{3^{\frac{1}{2}}\beta}{2\alpha}$ che implica $\varphi(t^*) = \frac{1}{2}\beta$ dunque la tesi con $\gamma = \frac{1}{4}\beta$. ■

Si ottiene così che

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\tau_j^2 \le C\,,$$

passando al limite su j si ha quindi che:

$$\int_{\Omega\setminus K} |\nabla u|^2\theta^2 \le C\,,$$

e usando il Lemma 3.10 si conclude che $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.
A questo punto facciamo vedere che

$$\int_\Omega \left(\alpha_{i\,l}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_l} - \psi(x, u, \nabla u)\varphi(x) \right) dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Si moltiplichi la (3.49) per $\varphi \cdot (1 - \xi_j)$, dove la successione ξ_j è quella usata nel Lemma 3.9 e si ha quindi

$$\int_\Omega \left[A(x,u)\nabla u \cdot \nabla \varphi - \psi\varphi \right] (1 - \xi_j) = \int_\Omega A(x,u)\nabla u \cdot \nabla \xi_j \,.$$

Dalla disuguaglianza di Hölder e dalla definizione di ξ_j il secondo membro tende a zero quando $j \to +\infty$.
Si ha allora

$$\int_\Omega A(x,u)\nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega \psi(x,u,\nabla u)\varphi \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,,$$

cioè la tesi. ■

Diamo ora le dimostrazioni dei Lemmi 3.10 e 3.11.

Dimostrazione del Lemma 3.10

Consideriamo la successione di funzioni τ_j già utilizzata nella dimostrazione del Lemma 3.9 e moltiplichiamo per $T_k(u)$. Allora $\tau_j T_k(u) \in H_0^1(\Omega)$ ed in particolare

$$\|\nabla \tau_j T_k(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\tau_j \nabla T_k(u)\|_{L^2(\Omega)} + \|T_k(u)\nabla\tau\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \xi_j T_k(u)\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Ma

$$\|T_k(u)\nabla\tau\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\nabla\tau\|_{L^2(\Omega)} < +\infty$$

poiché $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \backslash K)$ e $\mathrm{supp}\nabla\tau \subset \Omega\backslash K$;

$$\|\tau_j \nabla T_k(u)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_{\Omega\backslash K} |\nabla u|^2 < \infty\,;$$

e $\|\nabla \xi_j T_k(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq k \cdot \|\nabla \xi_j\|_{L^2(\Omega)}$. Quindi

$$\|\nabla \tau_j T_k(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq C + k \cdot \|\nabla \xi_j\|_{L^2(\Omega)}$$

con C che non dipende da j: passando allora al limite sulle j si ottiene che $\tau T_k(u) \in H_0^1(\Omega)$ e facendo tendere $k \to +\infty$ si ha $\psi u \in H_0^1(\Omega)$ ed in particolare $u \in H^1(\Omega)$. ■

Dimostrazione del Lemma 3.11
Consideriamo ora $(|u| - s)^+$: dalle disuguaglianze di Hölder e Sobolev abbiamo che

$$\|(|u| - s)^+\|_{L^1(\Omega)} \leq S\|\nabla(|u| - s)^+\|_{L^2(\Omega)} \cdot \rho(s)^{\frac{n+2}{2n}}$$

e S è la costante di Sobolev moltiplicata per la radice della misura di Ω e dunque dipendente solo da n. Per ipotesi sappiamo che

$$\int_{|u|>s} |\nabla u|^2 \leq C\rho^a(s) \quad \forall s \geq s_1 \geq C_1$$

quindi ponendo

$$f(s) = \int_s^\infty \rho(\sigma)d\sigma = \|(|u| - s)^+\|_{L^1(\Omega)} \leq C\rho(s)^p \qquad p = \frac{n+2}{2n} + \frac{a}{2},$$

si vede che $f(s)$ soddisfa la disequazione

$$f'(s) \leq -Cf(s)^{\frac{1}{p}} \quad \forall s \geq s_1 .$$

Dunque

$$\int \frac{f'(s)ds}{f(s)^{\frac{1}{p}}} \leq \int -Cds$$

che porta a

$$f(s) \leq p'[c_1 - cs]^{\frac{1}{p'}} \quad \forall s \geq s_1$$

ma dato che $p > 1$ allora esiste s^* tale che $f(s^*) = 0$ e dato che $f(s) \geq 0$, si ha che $f(s) = 0$ per s sufficientemente grande. Dunque $\forall s > s^*$, $\rho(s) = 0$ e quindi $u \in L^\infty(\Omega)$ ■

Capitolo 4

Stabilità delle soluzioni

Nei capitoli precedenti abbiamo dimostrato che se μ è una misura regolare la possiamo sempre decomporre in $\mu = \mu_a + \mu_s$, cioè in una parte assolutamente continua e in una singolare rispetto alla p-capacità; abbiamo poi visto che il problema

$$\begin{cases} A(u(x)) + g(x, u(x), \nabla u(x)) = \mu \quad \text{in } \Omega \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad g(x, u(x), \nabla u(x)) \in L^1(\Omega)\,, \end{cases} \tag{4.1}$$

non ammette soluzione nel caso in cui $\mu_s \neq 0$. Inoltre nel capitolo precedente abbiamo mostrato sotto quali ipotesi una singolarità in un insieme compatto di 2-capacità nulla è eliminabile. Ci proponiamo ora di provare un risultato di stabilità per soluzioni del problema (4.1); cioè dato un compatto K di p-capacità zero, e considerata una successione di funzioni non negative f_n in $L^\infty(\Omega)$ convergenti ad una f di $L^1(\Omega)$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega \setminus K)$ faremo vedere che la soluzione u_n del problema con dato f_n converge quasi ovunque verso una soluzione u del problema con dato f. Sostanzialmente la soluzione rimane invariata se il dato viene perturbato (anche in maniera "violenta", come vedremo) solo in un insieme di p-capacità nulla.
Vedremo due versioni di un Teorema a proposito della stabilità delle soluzioni; dimostreremo prima il caso più facile e poi indeboliremo una delle ipotesi sul termine di ordine inferiore a crescita naturale nel gradiente.
Enunciamo ora i due teoremi a partire dalla versione più debole:

Teorema 4.1 *Sia $K \subset \Omega$ un insieme compatto tale che $\text{cap}_p(K) = 0$, f una funzione non negativa in $L^1(\Omega)$ e f_n una successione di funzioni non negative* *in* $L^\infty(\Omega)$ *tale che*

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{in} \quad L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega\backslash K) \quad \text{nel senso che} \quad \int_{\Omega\backslash I(K)} |f_n - f| = 0 \tag{4.2}$$

per ogni $I(K)$ *intorno di* K. *Consideriamo* $a(x,s,\xi)$ *una funzione di Caratheodory tale che* $\exists\alpha,\beta \in \mathbf{R}^+$, *con*

$$a(x,s,\xi)\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^p\,, \tag{4.3}$$

$$|a(x,s,\xi)| \leq \beta|\xi|^{p-1}\,, \tag{4.4}$$

$$(a(x,s,\xi) - a(x,s,\xi'))(\xi - \xi') > 0\,, \tag{4.5}$$

per quasi ogni x *in* Ω, *per ogni* s *in* $\mathbf{R}$ *e per ogni* ξ *e* ξ' *in* $\mathbf{R}^N$, *con* $\xi \neq \xi'$. *Sia inoltre* $H(x,s,\xi)$ *ancora di Caratheodory, tale che*

$$H(x,s,\xi)\cdot s \geq 0 \quad \text{per q.o. } x \in \Omega\,, \forall s \in \mathbf{R}\,, \forall\xi \in \mathbf{R}^N\,, \tag{4.6}$$

$$H(x,s,\xi) \leq \theta(x) + b(s)|\xi|^p \quad \text{per q.o. } x \in \Omega\,, \forall s \in \mathbf{R}\,, \forall\xi \in \mathbf{R}^N\,, \tag{4.7}$$

dove $\theta(x)$ *è una funzione positiva tale che* $\theta(x) \in L^1(\Omega)$, *e* $b(t) \in C(\mathbf{R})$;

$$|H(x,s,\xi)| \geq g(s)|\xi|^p \quad \text{per q.o. } x \in \Omega\,, \forall s \in \mathbf{R}\,, \forall\xi \in \mathbf{R}^N\,, \tag{4.8}$$

e $g(s)$ *è una funzione* $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, *con*

$$g(s) \geq 0\,, \tag{4.9}$$

$$g(s) \in L^\infty(\mathbf{R})\,, \tag{4.10}$$

$$e^{\frac{-G(s)}{\beta(p-1)}} \in L^1(\mathbf{R}^+)\,, \tag{4.11}$$

essendo $G(s) = \displaystyle\int_0^s g(t)dt$. *Se* $u_n \in W^{1,p}_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *è una successione di funzioni tale che*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,u_n(x),\nabla u_n(x))) + H(x,u_n(x),\nabla u_n(x)) = f_n & \text{in}\,\Omega \\ u = 0 & \text{su}\,\partial\Omega, \end{cases} \tag{4.12}$$

allora u_n *converge (pur di passare a sottosuccessioni che continueremo ad indicare con* u_n*) quasi ovunque verso una soluzione* u *del problema*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,u(x),\nabla u(x))) + H(x,u(x),\nabla u(x)) = f & \text{in}\,\Omega \\ u = 0 & \text{su}\,\partial\Omega. \end{cases} \tag{4.13}$$

Inoltre $a(x,u,\nabla u)$ *e* $H(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega)$, $T_k(u) \in W^{1,p}_0(\Omega)$ $\forall k > 0$ *e* $|\nabla u|^{p-1} \in L^q(\Omega)$ $\forall q < \frac{N}{N-1}$.

Enunciamo ora una versione più forte del teorema, che dimostreremo per prima, e che servirà per dimostrare il Teorema 4.1:

Teorema 4.2 *Sia $K \subset \Omega$ un insieme compatto tale che $cap_p(K) = 0$, f una funzione non negativa in $L^1(\Omega)$ e f_n una successione di funzioni non negative in $L^\infty(\Omega)$ tale che valga (4.2). Consideriamo $a(x, s, \xi)$ una funzione di Caratheodory tale che soddisfi (4.3), (4.4) e (4.5) e sia $H(x, s, \xi)$ ancora di Caratheodory, tale che verifichi (4.6), (4.7) e (4.8) con $g(s)$ tale che valgano la (4.9) e la (4.10). Supponiamo inoltre che $\exists \gamma, s_0 \geq 0$ tali che*

$$g(s) \geq \gamma \qquad \forall s \geq s_0\,. \tag{4.14}$$

Se $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ è una successione di funzioni tale che

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x, u_n(x), \nabla u_n(x))) + H(x, u_n(x), \nabla u_n(x)) = f_n & \mathit{in}\,\Omega \\ \hfill u = 0 & \mathit{su}\,\partial\Omega, \end{cases} \tag{4.15}$$

allora u_n converge (pur di passare a sottosuccessioni che continueremo ad indicare con u_n) quasi ovunque verso una soluzione $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ del problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x, u(x), \nabla u(x))) + H(x, u(x), \nabla u(x)) = f & \mathit{in}\,\Omega \\ \hfill u = 0 & \mathit{su}\,\partial\Omega. \end{cases} \tag{4.16}$$

Osservazione 4.3 (4.14) $\Rightarrow$ (4.11). Infatti se $g(s) \geq \gamma\ \forall s \geq s_0$, allora $G(s)$ avrà crescita almeno lineare per s sufficientemente grandi, dunque $e^{\frac{-G(s)}{\beta(p-1)}} \in L^1(\mathbf{R}^+)$ cioè la (4.11).

4.1 Versione forte

Dimostrazione del Teorema 4.2. Si osservi inanzitutto che $u_n \geq 0$: infatti se scegliamo u_n^- come funzione test in 4.15 si ha:

$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n^- + \int_\Omega H(x, u_n, \nabla u_n)u_n^- = \int_\Omega f_n u_n^-$$

e portando il primo integrale al secondo membro e l'ultimo al primo,

$$-\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n^- = -\int_\Omega f_n u_n^- + \int_\Omega H(x, u_n, \nabla u_n)u_n^-\,.$$

Allora

$$-\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n^- \geq \alpha\int_\Omega |\nabla u_n^-|^p$$

e, ricordando che $f_n \geq 0$ e l'ipotesi di segno (4.6) su $H(x,s,\xi)$,

$$-\int_\Omega f_n u_n^- + \int_\Omega H(x,u_n,\nabla u_n)u_n^- \leq 0$$

quindi $\|u_n^-\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 0$ cioè $u_n^- = 0$.
Come conseguenza del fatto che le u_n sono positive, grazie alla (4.6) abbiamo che $H(x,u_n,\nabla u_n) \geq 0$

Ricordiamo che, per definizione di p-capacità di un compatto, essendo $\mathrm{cap}_p(K) = 0$, per ogni $\delta > 0$ esiste un aperto A_δ contenente K, e una funzione $\psi_\delta \in C_0^\infty(\Omega)$ tali che

$$\mathrm{mis}(A_\delta) \leq \delta\,, \tag{4.17}$$

$$0 \leq \psi_\delta \leq 1 \quad \text{su}\,\Omega\,, \tag{4.18}$$

$$\psi_\delta \equiv 1 \quad \text{in un intorno di } K\,, \tag{4.19}$$

$$\int_\Omega |\nabla\psi_\delta|^p dx \leq \delta\,. \tag{4.20}$$

Passo 1. Vogliamo dimostrare in questo primo Passo che esiste una costante $c > 0$ tale che

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p(1-\psi_\delta)^p \leq c\left[\int_\Omega f_n(1-\psi_\delta)^p + \int_\Omega |\nabla\psi_\delta|^p\right]. \tag{4.21}$$

Si consideri la funzione (s_0 è dato da (4.14))

$$v = T_{s_0}(u_n)(1-\psi_\delta)^p\,,$$

e si osservi che $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ essendo $\psi_\delta \in C^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$: dunque v è una funzione test ammissibile per il problema (4.16). Moltiplicando e integrando su Ω si ottiene:

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla T_{s_0}(u_n)(1-\psi_\delta)^p \tag{4.22}$$

$$-p\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)T_{s_0}(u_n)(1-\psi_\delta)^{p-1}\nabla\psi_\delta \tag{4.23}$$

$$+\int_\Omega H(x,u_n,\nabla u_n)T_{s_0}(u_n)(1-\psi_\delta)^p \tag{4.24}$$

$$= \int_\Omega f_n T_{s_0}(u_n)(1-\psi_\delta)^p\,. \tag{4.25}$$

Dalla definizione di troncata, e dal fatto che f_n e u_n sono non negative si ha

$$\int_\Omega f_n T_{s_0}(u_n)(1-\psi_\delta)^p \le s_0 \int_\Omega f_n(1-\psi_\delta)^p\,;$$

inoltre osservando che il primo integrale è inteso solo dove $0 \le u_n \le s_0$ si ha che

$$(4.22) \ge \alpha \int_\Omega |\nabla T_{s_0}(u_n)|^p(1-\psi_\delta)^p.$$

Consideriamo ora la (4.24): $H(x,u_n,\nabla u_n)$ è positiva, dunque

$$\begin{aligned}(4.24) \;&=\; \int_{\{u_n\le s_0\}} H(x,u_n,\nabla u_n)T_{s_0}(u_n)(1-\psi_\delta)^p \\ &\quad + \int_{\{u_n\ge s_0\}} H(x,u_n,\nabla u_n)T_{s_0}(u_n)(1-\psi_\delta)^p \\ &\ge\; \gamma s_0 \int_{\{u_n\ge s_0\}} |\nabla u_n|^p(1-\psi_\delta)^p\,,\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato l'ipotesi (4.14) sulla $H(x,s,\xi)$. Mettendo insieme le informazioni sulla (4.24) e sulla (4.22) otteniamo:

$$(4.24) + (4.22) \ge \min\{\alpha,\gamma s_0\} \int_\Omega |\nabla u_n|^p(1-\psi_\delta)^p.$$

Passiamo alla (4.23): dalla proprietà (4.4) e usando nel secondo passaggio la disuguaglianza di Young, in maniera tale che il coefficiente dell'addendo in cui compare $\int_\Omega |\nabla u_n|^p(1-\psi_\delta)^p$ sia $\frac{\min\{\alpha,\gamma s_0\}}{2}$, si ottiene:

$$\begin{aligned}|(4.23)| \;&\le\; \beta p \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-1}(1-\psi_\delta)^{p-1}|\nabla\psi_\delta| T_{s_0}(u_n) \\ &\le\; \frac{\min\{\alpha,\gamma s_0\}}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^p(1-\psi_\delta)^p + c(\alpha,\gamma,s_0)\int_\Omega |\nabla\psi_\delta|^p\,.\end{aligned}$$

Dunque si ha

$$\begin{aligned}&\min\{\alpha,\gamma s_0\}\int_\Omega |\nabla u_n|^p(1-\psi_\delta)^p - \frac{\min\{\alpha,\gamma s_0\}}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^p(1-\psi_\delta)^p \\ &\le s_0 \int_\Omega f_n(1-\psi_\delta)^p + c\int_\Omega |\nabla\psi_\delta|^p\,,\end{aligned}$$

cioè la (4.21).
Osserviamo esplicitamente che, essendo $1-\psi_\delta$ nulla in un intorno di K, l'ipotesi (4.2) sulla successione f_n fa sì che esista una costante c_δ, indipendente da n, tale che

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p (1-\psi_\delta)^p \leq c_\delta\,, \tag{4.26}$$

per ogni n in $\mathbf{N}$.

Passo 2. A questo punto vogliamo provare che esiste una costante c_δ tale che per ogni $k>0$ esiste c_k tale che:

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p [1-(1-\psi_\delta)^p] \leq c_\delta + c_k \left(1+\int_\Omega |\nabla \psi_\delta|^p\right)\,. \tag{4.27}$$

Scegliamo come funzione test $v=\varphi_\lambda(k-T_k(u_n))[1-(1-\psi_\delta)^p]$ (dove φ_λ è la funzione $\varphi_\lambda : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definita nel Lemma 2.2) che è ammissibile essendo prodotto di una funzione $L^\infty(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$ $(\varphi_\lambda(k-T_k(u_n)))$ e di una funzione $C_0^\infty(\Omega)$ $(1-(1-\psi_\delta)^p)$. Si ottiene allora:

$$-\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla T_k(u_n)[1-(1-\psi_\delta)^p]\varphi'_\lambda(k-T_k(u_n)) \tag{4.28}$$

$$+p\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla\psi_\delta(1-\psi_\delta)^{p-1}\varphi_\lambda(k-T_k(u_n)) \tag{4.29}$$

$$+\int_\Omega H(x,u_n,\nabla u_n)\varphi_\lambda(k-T_k(u_n))[1-(1-\psi_\delta)^p] \tag{4.30}$$

$$=\int_\Omega f_n\varphi_\lambda(k-T_k(u_n))[1-(1-\psi_\delta)^p] \tag{4.31}$$

La (4.28) si porta al secondo membro e si sfrutta l'ellitticità di $a(x,s,\xi)$; si osservi poi che la (4.31) è positiva, e quindi

$$p\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla\psi_\delta(1-\psi_\delta)^{p-1}\varphi_\lambda(k-T_k(u_n)) +$$

$$\int_\Omega H(x,u_n,\nabla u_n)\varphi_\lambda(k-T_k(u_n))[1-(1-\psi_\delta)^p] + c_\delta \geq$$

$$\alpha\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p[1-(1-\psi_\delta)^p]\varphi'_\lambda(k-T_k(u_n))\,.$$

Ora, alla (4.29) applichiamo la disuguaglianza di Young in maniera da ottenere

$$|(4.29)| \leq (p-1)\int_\Omega |\nabla u_n|^p(1-\psi_\delta)^p + c\int_\Omega |\nabla\psi_\delta|^p\varphi_\lambda^p(k-T_k(u_n))$$

e quindi dal Passo 1 (si veda la (4.26)) e dalla monotonia di $\varphi_\lambda(t)$ otteniamo

$$|(4.29)| \leq c_\delta + c\varphi_\lambda^p(k)\int_\Omega |\nabla \psi_\delta|^p \,.$$

Inoltre dalla (4.7) si deduce che

$$(4.30) \leq \int_\Omega b(u_n)|\nabla T_k(u_n)|^p[1-(1-\psi_\delta)^p]\varphi_\lambda(k-T_k(u_n)) + \int_\Omega \theta(x)\varphi_\lambda(k-T_k(u_n))\,.$$

Mettendo insieme tutte le informazioni, osservando che

$$\int_\Omega \theta(x)\varphi_\lambda(k - T_k(u_n)) = c_k\,,$$

si ottiene

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p[1-(1-\psi_\delta)^p]\,[\alpha\,\varphi_\lambda'(k-T_k(u_n)) - b_k\,\varphi_\lambda(k-T_k(u_n))]$$

$$\leq c_\delta + c_k + c_k\int_\Omega |\nabla\psi_\delta|^p\,, \quad \text{dove} \quad b_k = \max_{[0,k]} b(s)$$

che ci porta a concludere il secondo Passo grazie alla proprietà della φ_λ:

$$\alpha\varphi_\lambda' - b_k\varphi_\lambda \geq \frac{1}{2} \quad \text{avendo scelto } \lambda = \frac{b_k^2}{4\alpha}.$$

Passo 3. Dimostriamo ora che

$$u_n \to u \text{ q.o.} \quad \text{e} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,.$$

Unendo i risultati dei primi due Passi e notando che, $\forall k \in \mathbf{R}^+$,
$|\nabla u| \geq |\nabla T_k(u)|$, abbiamo dimostrato che

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p\,[1-(1-\psi_\delta)^p] \leq c_\delta(1+c_k)$$

e

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p(1-\psi_\delta)^p \leq c_\delta\,;$$

da ciò, sommando e ponendo $\delta = 1$, si deduce che

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p \leq c_k\,,$$

cioè che la successione $T_k(u_n)$ è limitata in $W_0^{1,p}(\Omega)$; quindi il Teorema di Rellich ci assicura che esiste una sottosuccessione (detta ancora $T_k(u_n)$) che converge forte in $L^p(\Omega)$ e che, inoltre, è una successione di Cauchy in misura. Vogliamo in primo luogo dimostrare che

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{n\in\mathbf{N}}\operatorname{mis}\{x\in\Omega : u_n\geq k\}=0\,. \tag{4.32}$$

Dividiamo quindi l'insieme $\{x\in\Omega : u_n\geq k\}$ in questo modo:

$$\{x\in\Omega : u_n\geq k\}=(\{x\in\Omega : u_n\geq k\}\cap A_\delta)\cup(\{x\in\Omega : u_n\geq k\}\cap A_\delta^c)$$

dove A_δ soddisfa (4.17), cosicché $\operatorname{mis}(\{x\in\Omega : u_n\geq k\}\cap A_\delta)\leq\delta$; concentriamoci quindi sull'altro insieme. Si ha:

$$\begin{aligned}\operatorname{mis}(\{x\in\Omega : u_n\geq k\}\cap A_\delta^c)&=\frac{1}{k^p}\int_{\{u_n\geq k\}\cap A_\delta^c}T_k(u_n)^p\\&=\frac{1}{k^p}\int_{\{u_n\geq k\}\cap A_\delta^c}T_k(u_n)^p(1-\psi_\delta)^p\end{aligned}$$

avendo ψ_δ il supporto contenuto in A_δ. Allora, estendendo l'integrale a tutto Ω:

$$\operatorname{mis}(\{x\in\Omega : u_n\geq k\}\cap A_\delta^c)\leq\int_\Omega|T_k(u_n)(1-\psi_\delta)|^p\,.$$

Applichiamo ora all'ultima espressione la disuguaglianza di Poincaré:

$$\begin{aligned}\int_\Omega|T_k(u_n)(1-\psi_\delta)|^p&\leq c\int_\Omega|\nabla(|T_k(u_n)|(1-\psi_\delta))|^p\\&=\int_\Omega|\nabla T_k(u_n)(1-\psi_\delta)-T_k(u_n)\nabla\psi_\delta|^p\\&\leq c\int_\Omega|\nabla T_k(u_n)|^p(1-\psi_\delta)^p+c\int_\Omega T_k(u_n)^p|\nabla\psi_\delta|^p\\&\leq c\int_\Omega|\nabla u_n|^p(1-\psi_\delta)^p+ck^p\int_\Omega|\nabla\psi_\delta|^p\end{aligned}$$

per il primo Passo e poiché $\int_\Omega|\nabla\psi_\delta|^p=\omega(\delta)$, si ha:

$$\operatorname{mis}(\{x\in\Omega : u_n\geq k\}\cap A_\delta^c)\leq\frac{p}{k^p}\cdot(c_\delta+k^p\delta)=\frac{c_\delta}{k^p}+\delta\,.$$

Possiamo così concludere che

$$\operatorname{mis}\{x\in\Omega : u_n\geq k\}\leq\frac{c_\delta}{k^p}+\delta\,,$$

e dunque
$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{n\in\mathbf{N}}\operatorname{mis}\{x\in\Omega: u_n\geq k\}\leq\delta$$
cioè, grazie all'arbitrarietà di δ, la tesi.

Facciamo ora vedere che la successione u_n è di Cauchy in misura, cioè che
$$\operatorname{mis}\{x\in\Omega: |u_n-u_m|>\varepsilon\}$$
è piccola per n e m sufficientemente grandi. Decomponiamo l'insieme $\{x\in\Omega: |u_n-u_m|>\varepsilon\}$ in questo modo:

$$\begin{aligned}\{|u_n-u_m|\geq\varepsilon\} &= \left\{\begin{matrix} u_n-u_m|\geq\varepsilon\\ |u_n|>k\end{matrix}\right\}\cup\left\{\begin{matrix}|u_n-u_m|\geq\varepsilon\\ |u_n|\leq k\end{matrix}\right\}\\ &= \left\{\begin{matrix}|u_n-u_m|\geq\varepsilon\\ |u_n|>k\end{matrix}\right\}\cup\left\{\begin{matrix}|v-u_m|\geq\varepsilon\\ |u_n|\leq k,|u_m|\leq k\end{matrix}\right\}\cup\left\{\begin{matrix}|u_n-u_m|\geq\varepsilon\\ |u_n|\leq k,|u_m|>k\end{matrix}\right\}\\ &\subseteq \{|u_n|>k\}\cup\{|T_k(u_n)-T_k(u_m)|\geq\varepsilon\}\cup\{|u_m|>k\}\,.\end{aligned}$$

Osserviamo che il primo e il terzo insieme hanno misura piccola dalla (4.32) per n e $m\geq n_\varepsilon$, e che il termine centrale è piccolo, pur di scegliere k abbastanza grande, in quanto la successione $\{T_k(u_n)\}$ è di Cauchy in misura. Si trova così la proprietà cercata per u_n; pertanto, pur di passare a sottosuccessioni, u_n converge verso u quasi ovunque.
Dobbiamo ancora far vedere che $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Osservazione 4.4 Si noti che siamo arrivati a dimostrare la convergenza quasi ovunque di u_n verso u, senza mai usare veramente l'ipotesi di convergenza di f_n verso f in $L^1_{\text{loc}}(\Omega\backslash K)$, ma solo una sua conseguenza, cioè f_n limitata in L^1 al di fuori di K.

Si noti che dalla limitatezza della successione $\{T_k(u_n)\}$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ si ha che $T_k(u_n)$ converge debolmente verso qualcosa: la continutà della funzione $s\to T_k(s)$ e la convergenza quasi ovunque di u_n verso u, ci fanno concludere che
$$T_k(u_n)\rightharpoonup T_k(u)\quad\text{in } W_0^{1,p}(\Omega)\,.$$

Dal Passo 1 sappiamo che

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p (1-\psi_\delta)^p \le c\left[\int_\Omega |f_n|(1-\psi_\delta)^p + \int_\Omega |\nabla \psi_\delta|^p\right]$$

ed essendo $|\nabla u_n| \ge |\nabla T_k(u_n)|$

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p (1-\psi_\delta)^p \le c\left[\int_\Omega |f_n|(1-\psi_\delta)^p + \int_\Omega |\nabla \psi_\delta|^p\right].$$

Il funzionale $\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p (1-\psi_\delta)^p$ è semicontinuo inferiormente, quindi dato che

$$T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u) \quad \text{in } W_0^{1,p}(\Omega).$$

si ha

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p (1-\psi_\delta)^p \ge \int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p (1-\psi_\delta)^p.$$

Allora, passando al limite su n, usando la (4.2), e la proprietà (4.19) di ψ_δ,

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p (1-\psi_\delta)^p \le c\left[\int_\Omega |f|(1-\psi_\delta)^p + \int_\Omega |\nabla \psi_\delta|^p\right];$$

facendo ora tendere $\delta \to 0$ si ha

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p \le c\int_\Omega |f|.$$

Ma il secondo membro non dipende da k e dunque si può passare al limite su k, e così si ha:

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \le c\int_\Omega |f|$$

cioè

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Passo 4. Dimostreremo ora che

$$T_k(u_n)(1-\psi_\delta)^p \to T_k(u)(1-\psi_\delta)^p \quad \text{forte in} \quad W_0^{1,p}(\Omega); \tag{4.33}$$

per far ciò scegliamo come funzione test in (4.16) $v = \varphi_\lambda(T_k(u_n) - T_k(u))(1-\psi_\delta)^p$. Si osservi che

$$\varphi_\lambda(T_k(u_n) - T_k(u)) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad \text{e} \quad (1-\psi_\delta)^p \in C^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),$$

dunque v è una funzione test ammissibile. Moltiplicando per v in (4.16) e integrando su Ω si ottiene:

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\varphi'_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p\nabla(T_k(u_n)-T_k(u)) \tag{4.34}$$

$$-p\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^{p-1}\nabla\psi_\delta \tag{4.35}$$

$$+\int_\Omega H(x,u_n,\nabla u_n)\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p \tag{4.36}$$

$$= \int_\Omega f_n\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p\,. \tag{4.37}$$

Si vede facilmente che

$$\int_\Omega f_n\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p = \omega(n)$$

in quanto dalla (4.2) $f_n(1-\psi_\delta)^p$ è fortemente compatta in $L^1(\Omega)$ e $\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))$ converge a zero quasi ovunque e nella topologia $*$-debole di $L^\infty(\Omega)$. Inoltre alla (4.35) si può applicare il Teorema di Lebesgue, essendo $\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))$ limitata da $\varphi_\lambda(k)$ e

$$a(x,u_n,\nabla u_n)(1-\psi_\delta)^{p-1} \le \beta\left(|\nabla u_n|(1-\psi_\delta)\right)^{p-1}$$

che è limitata in $(L^{p'}(\Omega))^N$ grazie al Passo 1: allora dalla convergenza di $\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))$ verso 0 quasi ovunque si ottiene

$$-p\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^{p-1}\nabla\psi_\delta = \omega(n).$$

Consideriamo ora la (4.36):

$$\begin{aligned}&\int_\Omega H(x,u_n,\nabla u_n)\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p\\ =&\int_{u_n\le k} H(x,u_n,\nabla u_n)\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p\\ &+\int_{u_n\ge k} H(x,u_n,\nabla u_n)\varphi_\lambda(k-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p\end{aligned}$$

ed essendo $k-T_k(u)\ge 0$, $H(x,s,\xi)\ge 0$ e $(1-\psi_\delta)^p\ge 0$ si ha che $\displaystyle\int_{u_n\ge k} H(x,u_n,\nabla u_n)\varphi_\lambda(k-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p \ge 0$ e dunque

$$\int_\Omega H(x,u_n,\nabla u_n)\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p \ge$$

$$\int_{u_n\le k} H(x,u_n,\nabla u_n)\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p\,.$$

Sfruttando ora la (4.7) abbiamo

$$\left|\int_{u_n\le k} H(x,u_n,\nabla u_n)\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p\right|$$

$$\le \int_{u_n\le k} b(u_n)|\nabla u_n|^p)\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p$$

$$+\int_{u_n\le k}\theta(x)\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p$$

e il secondo integrale al secondo membro è un $\omega(n)$ perché $\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))$ converge a zero nella topologia $*$-debole di L^∞ e $\theta\in L^1(\Omega)$. Allora definendo $b_k=\max\limits_{s\in[0,k]} b(s)$,

$$\left|\int_{u_n\le k} H(x,u_n,\nabla u_n)\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p\right|$$

$$\le \frac{b_k}{\alpha}\cdot\alpha\int_{u_n\le k}|\nabla u_n|^p\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p+\omega(n)$$

$$\le \frac{b_k}{\alpha}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla T_k(u_n)\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p+\omega(n)\,.$$

Dunque

$$\int_\Omega H(x,u_n,\nabla u_n)\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p\ge$$

$$-\frac{b_k}{\alpha}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u_n)\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p+\omega(n)\,.$$

Se ora aggiungiamo e sottraiamo la quantità

$$\frac{b_k}{\alpha}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u)\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p$$

e osserviamo che

$$\frac{b_k}{\alpha}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla T_k(u)^p\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p=\omega(n)$$

in quanto $a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n)$ è limitata in $(L^{p'}(\Omega))^N$ (dalla (4.4) e dal primo Passo) $\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))$ tende a zero forte (dal Teorema di Rellich) in $L^p(\Omega)$, abbiamo, a meno di quantità infinitesime $\omega(n)$,

$$(4.36)\ge$$

$$-\frac{b_k}{\alpha}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\nabla\left[T_k(u_n)-T_k(u_n)\right]\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p\,.$$

Aggiungendo e sottraendo, di nuovo, la quantità

$$\frac{b_k}{\alpha}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))\nabla\left[T_k(u_n)-T_k(u_n)\right]\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p$$

e osservando che

$$-\frac{b_k}{\alpha}\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))\nabla\left[T_k(u_n)-T_k(u_n)\right]\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p=$$

$$\omega(n)$$

in quanto $a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p$ è limitata in $(L^{p'}(\Omega))^N$ e $T_k(u_n)-T_k(u_n)$ tende a zero debolmente in $W_0^{1,p}(\Omega)$, possiamo allora asserire, usando la convenzione di chiamare

$$A_n(x)=\left(a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))-a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))\right)\nabla\left[T_k(u_n)-T_k(u_n)\right]\,,$$

che:

$$(4.36)\geq-\frac{b_k}{\alpha}\int_\Omega A_n(x)\nabla\left[T_k(u_n)-T_k(u_n)\right]\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p\,. \tag{4.38}$$

Consideriamo ora la (4.34): se aggiungiamo e sottraiamo anche a questo integrale la quantità

$$\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))\nabla\left[T_k(u_n)-T_k(u_n)\right]\varphi'_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p$$

e osserviamo che

$$\int_\Omega a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))\nabla\left[T_k(u_n)-T_k(u_n)\right]\varphi'_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p=\omega(n)$$

poiché $a(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))$ converge forte in $(L^{p'}(\Omega))^N$ verso $a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))$ (grazie al Teorema di Lebesgue e alla (4.4)) e $T_k(u_n)-T_k(u)$ converge a zero debolmente in $W_0^{1,p}(\Omega)$, otteniamo:

$$\int_\Omega A_n(x)\varphi'_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))(1-\psi_\delta)^p\,. \tag{4.39}$$

Mettendo insieme la (4.39) e la (4.38), abbiamo

$$\omega(n)\geq\int_\Omega A_n(x)(1-\psi_\delta)^p(\varphi'_\lambda-\frac{b_k}{\alpha}|\varphi_\lambda)\,;$$

scegliendo $\lambda = \frac{b_k^2}{4\alpha}$ e osservando che $A_n(x) > 0$ dalla (4.5), si ottiene

$$\omega(n) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega A_n(x)(1-\psi_\delta)^p \geq 0$$

e dunque dal Lemma 2.3, dimostrato nel Capitolo 2,

$$T_k(u_n)(1-\psi_\delta)^p \to T_k(u)(1-\psi_\delta)^p \quad \text{in} \quad W_0^{1,p}(\Omega)\,.$$

Passo 5. Dimostriamo ora che $H(x, u_n, \nabla u_n)(1-\psi_\delta)^p$ è, per δ fissato, compatta in $L^1(\Omega)$. Per far ciò useremo il Teorema di Vitali, quindi dovremo far vedere che se E è un insieme di misura piccola, anche $\displaystyle\int_E |H(x, u_n, \nabla u_n)(1-\psi_\delta)^p|$ diventa piccolo uniformemente rispetto a n. Dunque

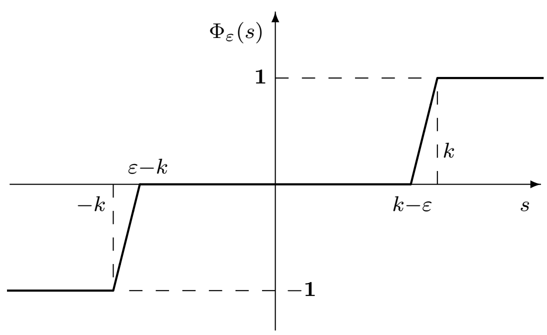
$$\int_E |H(x, u_n, \nabla u_n)(1-\psi_\delta)^p|$$

$$\leq \int_{E\cap\{|u_n|\geq k\}} |H(x, u_n, \nabla u_n)(1-\psi_\delta)^p| \tag{4.40}$$

$$+ \int_{E\cap\{|u_n|\leq k\}} |H(x, u_n, \nabla u_n)(1-\psi_\delta)^p|\,. \tag{4.41}$$

Lavoriamo per ora sul primo integrale: per far vedere che è piccolo scegliamo come funzione test in (4.16) un'approssimante della funzione $\chi_{\{u_n\geq k\}}$, cioè $\Phi_\varepsilon(u_n)$ dove

$$\Phi_\varepsilon(s) = T_1\left[\frac{G_{k-\varepsilon}(s)}{\varepsilon}\right]\,.$$



Allora abbiamo

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n \Phi'_\varepsilon(u_n)(1-\psi_\delta)^p \tag{4.42}$$

$$-p\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla \psi_\delta \Phi_\varepsilon(u_n)(1-\psi_\delta)^{p-1} \tag{4.43}$$

$$+\int_\Omega H(x,u_n,\nabla u_n)\Phi_\varepsilon(u_n)(1-\psi_\delta)^p \tag{4.44}$$

$$=\int_\Omega f_n \Phi_\varepsilon(u_n)(1-\psi_\delta)^p \tag{4.45}$$

ed osservando che $\Phi'_\varepsilon(s) \geq 0 \ \forall s \in \mathbf{R}$, il primo integrale è positivo. Inoltre sulla (4.43) possiamo fare le seguenti maggiorazioni;

$$|(4.43)| \leq p\beta \int_\Omega \left(|\nabla u_n|(1-\psi_\delta)\right)^{p-1} \Phi_\varepsilon(u_n)^{\frac{1}{p'}} \Phi_\varepsilon(u_n)^{\frac{1}{p}} \nabla\psi_\delta$$

per la disuguaglianza di Young, facendo sì che il coefficiente del primo termine sia esattamente $\frac{\gamma}{2}$, dove γ è la costante che compare in (4.14),

$$|(4.43)| \leq \frac{\gamma}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^p (1-\psi_\delta)^p \Phi_\varepsilon(u_n) + C_\gamma \int_\Omega |\nabla \psi_\delta|^p \Phi_\varepsilon(u_n)$$

e dalla (4.8)

$$\begin{aligned} &\frac{\gamma}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^p (1-\psi_\delta)^p \Phi_\varepsilon(u_n) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |H(x,u_n,\nabla u_n)|(1-\psi_\delta)^p \Phi_\varepsilon(u_n) \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega H(x,u_n,\nabla u_n)(1-\psi_\delta)^p \Phi_\varepsilon(u_n) \end{aligned}$$

poiché $H(x,s,\xi)\cdot s \geq 0$ e $\Phi_\varepsilon(u_n)$ ha lo stesso segno di u_n. Allora siamo riusciti a dimostrare che

$$(4.43) \geq -\frac{1}{2}\int_\Omega H(x,u_n,\nabla u_n)(1-\psi_\delta)^p \Phi_\varepsilon(u_n) - C_\gamma \int_\Omega |\nabla \psi_\delta|^p \Phi_\varepsilon(u_n)\,.$$

Dunque

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_\Omega H(x,u_n,\nabla u_n)(1-\psi_\delta)^p \Phi_\varepsilon(u_n) \\ &\leq C_\gamma \int_\Omega |\nabla \psi_\delta|^p \Phi_\varepsilon(u_n) + \int_\Omega f_n \Phi_\varepsilon(u_n)(1-\psi_\delta)^p\,, \end{aligned}$$

facendo ora tendere ε a zero, si ha che $\Phi_\varepsilon(s) \to \chi_{\{s\geq k\}}$ e dunque

$$\frac{1}{2}\int_{\{u_n\geq k\}} H(x,u_n,\nabla u_n)(1-\psi_\delta)^p$$

$$\leq C_\gamma \int_{\{u_n\geq k\}} |\nabla\psi_\delta|^p + \int_{\{u_n\geq k\}} f_n(1-\psi_\delta)^p\,.$$

Poiché $\psi_\delta \in C_0^\infty(\Omega)$ è positiva e non dipende né da n né da k, $\exists k_{\varepsilon_1}$ tale che

$$\int_{\{u_n\geq k\}} |\nabla\psi_\delta|^p \leq \varepsilon_1 \quad \forall\, k \geq k_{\varepsilon_1}\,;$$

inoltre $f_n(1-\psi_\delta)^p$ è compatta, per δ fissato, in $L^1(\Omega)$, dunque sempre il Teorema di Vitali e la (4.32) ci assicurano che $\exists k_{\varepsilon_2}$ tale che

$$\int_{\{u_n\geq k\}} f_n(1-\psi_\delta)^p \leq \varepsilon_2 \quad \forall\, k \geq k_{\varepsilon_2}\,.$$

Scegliendo ora $k \geq k_\varepsilon = \max\{k_{\varepsilon_1}, k_{\varepsilon_2}\}$ si ottiene la stima su (4.40).
Passiamo ora allo studio di (4.41): sfruttando la (4.7) abbiamo

$$(4.41) = \int_E |H(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))|(1-\psi_\delta)^p$$

$$\leq b_{k_\varepsilon}\int_E |T_k(u_n)|^p(1-\psi_\delta)^p + \int_E \theta(x)(1-\psi_\delta)^p$$

e grazie al fatto che $\theta(x) \in L^1(\Omega)$ e che dal Passo precedente

$$|\nabla T_k(u_n)|(1-\psi_\delta) \to |\nabla T_k(u)|(1-\psi_\delta) \quad \text{in } L^p(\Omega)$$

ancora il Teorema di Vitali ci fa ottenere la stima cercata su (4.41).
Dunque la succesione $\{H(x,u_n,\nabla u_n)(1-\psi_\delta)^p\}$ è equintegrabile e allora, essendo u_n convergente quasi ovunque verso u,

$$H(x,u_n,\nabla u_n)(1-\psi_\delta)^p \to H(x,u,\nabla u)(1-\psi_\delta)^p \quad \text{in } L^1(\Omega)\,.$$

Inoltre possiamo, a questo punto , dimostrare che

$$|\nabla u_n|^p(1-\psi_\delta)^p \to |\nabla u|^p(1-\psi_\delta)^p \quad \text{forte in } L^1(\Omega)\ :$$

infatti sappiamo già dal Passo 4 che

$$|\nabla T_k(u_n)|^p(1-\psi_\delta)^p \to |\nabla T_k(u)|^p(1-\psi_\delta)^p \quad \text{forte in } L^1(\Omega)$$

quindi basta far vedere che vale la stessa relazione per $|\nabla G_k(u_n)|^p(1-\psi_\delta)^p$. A partire dalle espressioni (4.42), (4.43), (4.44) e (4.45) vediamo che:

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n \Phi'_\varepsilon(u_n)(1-\psi_\delta)^p \geq 0$$

essendo $\Phi'_\varepsilon(u_n) \geq 0$; inoltre

$$\int_\Omega H(x,u_n,\nabla u_n)\Phi_\varepsilon(u_n)(1-\psi_\delta)^p \geq 0$$

poiché $\Phi_\varepsilon(u_n)$ ha lo stesso segno di u_n e

$$\int_\Omega H(x,u_n,\nabla u_n)\Phi_\varepsilon(u_n)(1-\psi_\delta)^p \geq \int_\Omega g(u_n)|\nabla u_n|^p \Phi_\varepsilon(u_n)(1-\psi_\delta)^p$$

pur di scegliere $k \geq s_0$ si ha

$$\int_\Omega H(x,u_n,\nabla u_n)\Phi_\varepsilon(u_n)(1-\psi_\delta)^p \geq \gamma \int_\Omega |\nabla u_n|^p \Phi_\varepsilon(u_n)(1-\psi_\delta)^p\,.$$

Portando la (4.43) al secondo membro e maggiorando $a(x,s,\xi)$ tramite la (4.4), si ottiene:

$$p\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla\psi_\delta \Phi_\varepsilon(u_n)(1-\psi_\delta)^{p-1}$$

$$\leq p\beta \int_\Omega (|\nabla u_n|(1-\psi_\delta))^{p-1}\,\Phi_\varepsilon^{\frac{1}{p'}}\nabla\psi_\delta \Phi_\varepsilon^{\frac{1}{p}}(u_n)$$

applicando la disuguaglianza di Young, facendo in modo che il primo coefficiente sia $\frac{\gamma}{2}$,

$$p\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla\psi_\delta \Phi_\varepsilon(u_n)(1-\psi_\delta)^{p-1}$$

$$\leq \frac{\gamma}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^p(1-\psi_\delta)^p\Phi_\varepsilon(u_n) + c_\gamma \int_\Omega |\nabla\psi_\delta|^p \Phi_\varepsilon(u_n)\,.$$

Dunque

$$\frac{\gamma}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^p(1-\psi_\delta)^p\Phi_\varepsilon(u_n)$$

$$\leq c_\gamma \int_\Omega |\nabla\psi_\delta|^p \Phi_\varepsilon(u_n) + \int_\Omega f_n \Phi_\varepsilon(u_n)(1-\psi_\delta)^p$$

e facendo tendere ε a zero, e conseguentemente $\Phi_\varepsilon(u_n) \to \chi_{\{u_n>k\}}$ si ha

$$\frac{\gamma}{2}\int_{\{u_n>k\}} |\nabla u_n|^p (1-\psi_\delta)^p$$

$$\leq c_\gamma \int_{\{u_n>k\}} |\nabla \psi_\delta|^p + \int_{\{u_n>k\}} f_n|(1-\psi_\delta)^p$$

Il primo integrale non è altro che

$$\frac{\gamma}{2}\int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^p (1-\psi_\delta)^p$$

ed essendo il secondo membro fortemente compatto in $L^1(\Omega)$ si conclude grazie al Teorema di Lebesgue che

$$|\nabla G_k(u_n)|^p (1-\psi_\delta)^p \to |\nabla G_k(u)|^p (1-\psi_\delta)^p \quad \text{in } L^1(\Omega)\,.$$

Unendo quest'informazione col Passo 4, abbiamo allora che $\{|\nabla u_n|^p(1-\psi_\delta)^p\}$ è compatta in $L^1(\Omega)$.

Passo 6. Dimostriamo ora che u è soluzione di

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla v(1-\psi_\delta)^p - p\int_\Omega a(x,u,\nabla u) v (1-\psi_\delta)^{p-1}\nabla\psi_\delta \tag{4.46}$$

$$+\int_\Omega H(x,u,\nabla u) v(1-\psi_\delta)^p = \int_\Omega f v (1-\psi_\delta)^p$$

$\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Usiamo allora $w = v(1-\psi_\delta)^p$ come funzione test in (4.16), moltiplicando e integrando si ottiene:

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla v(1-\psi_\delta)^p$$

$$-p\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla\psi_\delta v(1-\psi_\delta)^{p-1}$$

$$+\int_\Omega H(x,u_n,\nabla u_n) v(1-\psi_\delta)^p$$

$$= \int_\Omega f_n v(1-\psi_\delta)^p\,.$$

Dal Passo 5 sappiamo che

$$\int_\Omega H(x,u_n,\nabla u_n) v(1-\psi_\delta)^p = \int_\Omega H(x,u,\nabla u) v (1-\psi_\delta)^p + \omega(n)$$

e dalla (4.2) che

$$\int_\Omega f_n v(1-\psi_\delta)^p = \int_\Omega f v(1-\psi_\delta)^p + \omega(n)\,;$$

ci mancano i primi due termini: il Teorema di Lebesgue e la disuguaglianza di Young, uniti al fatto che $|\nabla u_n|^p(1-\psi_\delta)^p$ è compatta il $L^1(\Omega)$ ci fanno concludere che

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla v(1-\psi_\delta)^p = \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla v(1-\psi_\delta)^p + \omega(n)$$

e che

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla\psi_\delta v(1-\psi_\delta)^{p-1} = \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\psi_\delta v(1-\psi_\delta)^{p-1} + \omega(n)\,.$$

Dunque l'espressione cercata.

Passo 7. Finalmente proviamo che u è una soluzione del problema (4.16). Dobbiamo verificare che $H(x,u,\nabla u)\in L^1(\Omega)$: sostituiamo $v=T_1(u)$ nella (4.46), così da ottenere

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla T_1(u)(1-\psi_\delta)^p \tag{4.47}$$

$$-p\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\psi_\delta T_1(u)(1-\psi_\delta)^{p-1} \tag{4.48}$$

$$+\int_\Omega H(x,u,\nabla u)T_1(u)(1-\psi_\delta)^p \tag{4.49}$$

$$=\int_\Omega f T_1(u)(1-\psi_\delta)^p\,. \tag{4.50}$$

La (4.47), la (4.48) e la (4.50) sono uniformemente limitate rispetto a δ, quindi anche la (4.49) lo è. Inoltre

$$\int_\Omega H(x,u,\nabla u)T_1(u)(1-\psi_\delta)^p \geq \int_{\{u\geq 1\}} H(x,u,\nabla u)(1-\psi_\delta)^p$$

mentre

$$\int_{\{u\leq 1\}} H(x,u,\nabla u)(1-\psi_\delta)^p \leq \int_\Omega |\theta(x)|(1-\psi_\delta)^p + b_1\int_\Omega |\nabla T_1(u)|^p$$

$$\leq \|\theta\|_{L^1(\Omega)} + b_1\int_\Omega |\nabla T_1(u)|^p \leq c\,.$$

Dunque la successione $\{H(x,u,\nabla u)(1-\psi_\delta)^p\}$ è limitata in $L^1(\Omega)$, e convergente quasi ovunque per δ tendente a zero; allora il Lemma di Fatou ci assicura che $H(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega)$. Passando, ora, al limite per δ che tende a zero nella (4.46), e ricordando che, dalle proprietà di ψ_δ,

$$\int_\Omega |\nabla \psi_\delta|^p = \omega(\delta) \quad \text{e} \quad \psi_\delta \overset{*-L^\infty(\Omega)}{\rightharpoonup} 0$$

si ottiene

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u_n)\nabla v + \int_\Omega H(x,u,\nabla u)v = \int_\Omega f v\,. \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

cioè la tesi del Teorema. ■

4.2 Versione debole

Sfruttando il risultato appena provato, daremo ora la dimotrazione della versione debole del Teorema. Iniziamo dando la definizione di gradiente di una funzione tramite le troncate.

Definizione 4.5 Chiamiamo

$$T_0^{1,p}(\Omega) = \{f \text{ misurabili e finite q.o.} : T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)\,, \forall k > 0\}\,.$$

Si osservi che $T_0^{1,p}(\Omega)$ non è uno spazio vettoriale: si prendano per esempio in $\Omega = (-1,1)$ le funzioni

$$u(x) = 1 - \sqrt{|x|} \quad \text{e} \quad v(x) = \frac{1}{|x|} - 1\,;$$

v e $v + u \in T_0^{1,p}(\Omega)$, ma $u \notin T_0^{1,p}(\Omega)$.

A partire da questo spazio è possibile però dare una definizione di gradiente di una funzione $u \in T_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposizione 4.6 *Sia $u \in T_0^{1,p}(\Omega)$. Allora esiste un'unica funzione misurabile $v : \Omega \to \mathbf{R}^N$ tale che $\nabla T_k(u) = v\chi_{\{|u|\le k\}}$ quasi ovunque in Ω, $\forall k > 0$. Inoltre $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se e solo se $v \in (L^p(\Omega))^N$, ed in tal caso $v = \nabla u$.*

Dimostrazione. Si veda [1], Lemma 2.1, pag 245.

■

D'ora in poi, se u è in $T_0^{1,p}$ definiremo ∇u tale funzione v.

Esempio 4.7 Si consideri la funzione $f : B_1(0) \subset \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \frac{x_1}{|x|^N} \in L^1_{\mathrm{loc}}(B_1(0)) :$$

facciamo vedere che il gradiente di $f(x)$ (nel senso delle troncate) non coincide col gradiente nel senso delle distribuzioni mostrando che $\nabla f(x)$ nel senso della Proposizione 4.6 non appartiene a $L^1_{\mathrm{loc}}(B_1(0))$. Infatti

$$\frac{\partial T_k(f(x))}{\partial x_1} = \left[\frac{1}{|x|^N} - N\frac{x_1^2}{|x|^{N+2}}\right]\chi_{\{|f(x)|\le k\}}.$$

che converge quasi ovunque verso

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \left[\frac{1}{|x|^N} - N\frac{x_1^2}{|x|^{N+2}}\right].$$

Si vede allora che $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \notin L^1_{\mathrm{loc}}(B_1(0))$, dunque neanche $\nabla f(x) \notin L^1_{\mathrm{loc}}(B_1(0))$. Calcoliamo ora la derivata parziale rispetto ad x_1 nel senso delle distribuzioni. Ricordiamo che $g(x)$ si dice derivata di $h(x)$ distribuzionale se

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x) = -\int_\Omega h(x)\varphi_{x_1}(x) \qquad \forall\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dunque:

$$\int_{B_1(0)} f(x)\varphi_{x_1}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} f(x)\varphi_{x_1}(x)$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} f_{x_1}(x)\varphi(x) + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x)\varphi(x)\,;$$

Si ha quindi che

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x)\varphi(x) = \int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x)[\varphi(x) - \varphi(0)] + \varphi(0)\int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x)$$

con

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x)[\varphi(x) - \varphi(0)] = \omega(\varepsilon) \quad \text{e} \quad \int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x) \to \frac{1}{N}\sigma_{N-1}\,\text{per } \varepsilon \to 0\,,$$

dove σ_{N-1} indica la misura della superficie sferica della sfera unitaria di dimensione $N-1$. Allora

$$\int_{B_1(0)} f(x)\varphi_{x_1}(x) = \mathbf{vp}\left(\frac{1}{|x|^N} - N\frac{x_1^2}{|x|^{N+2}}\right) + \frac{1}{N}\sigma_{N-1}\,\delta_0\,,$$

dove δ_0 è la massa di Dirac cocentrata nell'origine e $\mathbf{vp}(\cdot)$ indica il valore principale.

Passiamo ora alla dimostrazione del teorema nella sua versione più debole:
Dimostrazione del Teorema 4.1
Consideriamo la seguente funzione $\psi : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$:

$$\psi(s) = (p-1)\left[\log S - \int_s^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{-G(s)}{\beta(p-1)}}\right] \quad \text{dove} \quad S = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{-G(s)}{\beta(p-1)}}\,;$$

si osservi che la funzione è ben definita (per ipotesi $\mathrm{e}^{\frac{-G(s)}{\beta(p-1)}} \in L^1(\mathbf{R})$) continua con derivata continua e crescente, cioè è una biiezione di $\mathbf{R}^+$ sull'immagine di $\psi(s)$, quindi esiste $\rho(s)$ tale che $\psi(\rho(s)) = \rho(\psi(s)) = s$. Inoltre

$$\psi'(s) = (p-1)\frac{\mathrm{e}^{\frac{-G(s)}{\beta(p-1)}}}{\displaystyle\int_s^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{-G(s)}{\beta(p-1)}}}$$

e

$$\psi''(s) = (p-1)\left[\frac{\frac{G(s)}{\beta(p-1)} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-G(s)}{\beta(p-1)}} \cdot \displaystyle\int_s^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{-G(s)}{\beta(p-1)}}}{\left[\displaystyle\int_s^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{-G(s)}{\beta(p-1)}}\right]^2} - \frac{\mathrm{e}^{\frac{-2G(s)}{\beta(p-1)}}}{\left[\displaystyle\int_s^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{-G(s)}{\beta(p-1)}}\right]^2}\right]\,;$$

allora si vede facilmente che $\psi(s)$ risolve la seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} (p-1)\,\psi''(s) = \psi'(s)^2 - \dfrac{\psi'(s)\,g(s)}{\beta}\,, \\ \psi(0) = 0\,, \\ \psi'(0) = \frac{p-1}{S}\,. \end{cases} \tag{4.51}$$

Definiamo ora

$$\overline{a}(x,s,\xi) = \psi'(\rho(s))^{p-1}\, a\left(x, s, \frac{\xi}{\psi'(\rho(s))}\right)\;:$$

vogliamo dimostrare che $\overline{a}(x,s,\xi)$ ha le stesse proprietà di $a(x,s,\xi)$. Innanzitutto $\overline{a}(x,s,\xi)$ è una funzione di Caratheodory, essendolo $a(x,s,\xi)$ ed essendo ψ, ψ' e ρ continue e $\psi' > 0$. Inoltre

1. $\overline{a}(x,s,\xi)\cdot\xi=$
$$\psi'(\rho(s))^{p-1}\, a\left(x, s, \frac{\xi}{\psi'(\rho(s))}\right)\cdot\xi =$$

$$\psi'(\rho(s))^p\, a\left(x, s, \frac{\xi}{\psi'(\rho(s))}\right) \cdot \frac{\xi}{\psi'(\rho(s))} \geq$$

$$\alpha\psi'(\rho(s))^p \left|\frac{\xi}{\psi'(\rho(s))}\right|^p = \alpha|\xi|^p\,;$$

2. $|\overline{a}(x,s,\xi)|=$

$$\left|\psi'(\rho(s))^{p-1}\, a\left(x, s, \frac{\xi}{\psi'(\rho(s))}\right)\right| \leq$$

$$\beta\psi'(\rho(s))^{p-1} \left|\frac{\xi}{\psi'(\rho(s))}\right| \leq \beta|\xi|^{p-1}\,;$$

3. $(\overline{a}(x,s,\xi) - \overline{a}(x,s,\eta))(\xi-\eta)=$

$$\psi'(\rho(s))^{p-1}\, a\left(x, s, \frac{\xi}{\psi'(\rho(s))}\right) - \psi'(\rho(s))^{p-1}\, a\left(x, s, \frac{\eta}{\psi'(\rho(s))}\right)(\xi-\eta) =$$

$$\psi'(\rho(s))^p \left[a\left(x, s, \frac{\xi}{\psi'(\rho(s))}\right) - a\left(x, s, \frac{\eta}{\psi'(\rho(s))}\right)\right] \left(\frac{\xi}{\psi'(\rho(s))} - \frac{\eta}{\psi'(\rho(s))}\right) > 0\,.$$

Inoltre se chiamiamo

$$\overline{H}(x,s,\xi) = \overline{a}(x,s,\xi)\cdot\xi\left[1 - \frac{g(\rho(s))}{\beta\psi'(\rho(s))}\right] + \psi'(\rho(s))^{p-1} H\left(x, s, \frac{\xi}{\psi'(\rho(s))}\right)$$

si vede che anche in questo caso $\overline{H}(x,s,\xi)$ ha le stesse proprietà della funzione $H(x,s,\xi)$ del Teorema 4.2: infatti

1. $\overline{H}(x,s,\xi)\, s=$

$$\overline{a}(x,s,\xi)\cdot\xi\left[1 - \frac{g(\rho(s))}{\beta\psi'(\rho(s))}\right] s + \psi'(\rho(s))^{p-1} H\left(x, s, \frac{\xi}{\psi'(\rho(s))}\right) s =$$

$$s\psi'(\rho(s))^{p-1}\left[a\left(x, s, \tfrac{\xi}{\psi'(\rho(s))}\right)\cdot\xi - \tfrac{g(\rho(s))}{\beta\psi'(\rho(s))} a\left(x, s, \tfrac{\xi}{\psi'(\rho(s))}\right)\cdot\xi\right.$$

$$\left. + H\left(x, s, \tfrac{\xi}{\psi'(\rho(s))}\right)\right]$$

$$\geq s\psi'(\rho(s))^{p-1}\left[\alpha\left|\tfrac{\xi}{\psi'(\rho(s))}\right|^p \psi'(\rho(s)) - g(\rho(s))\left|\tfrac{\xi}{\psi'(\rho(s))}\right|^{p-1}\cdot\tfrac{\xi}{\psi'(\rho(s))} +\right.$$

$$\left. g(\rho(s))\left|\tfrac{\xi}{\psi'(\rho(s))}\right|^p\right]$$

$$= \alpha\, s\, \psi'(\rho(s))^{p-1} \left| \frac{\xi}{\psi'(\rho(s))} \right|^p \psi'(\rho(s)) = s\alpha|\xi|^p \geq 0$$

2. $\overline{H}(x,s,\xi)$=

$$\psi'(\rho(s))^{p-1} a\left(x, s, \frac{\xi}{\psi'(\rho(s))}\right) \cdot \xi \left(1 - \frac{g(\rho(s))}{\beta\psi'(\rho(s))}\right)$$

$$+\psi'(\rho(s))^{p-1}\, H\left(x, s, \frac{\xi}{\psi'(\rho(s))}\right) \leq$$

$$\beta|\xi|^{p-1} \cdot \xi \left| \frac{\beta\psi'(\rho(s)) - g(\rho(s))}{\beta\psi'(\rho(s))} \right| + \theta(x)\psi'(\rho(s))^{p-1} + b(s)\frac{|\xi|^p}{\psi'(\rho(s))} \leq$$

$$\frac{1}{\psi'(\rho(s))}\left[\overline{\theta}(x) + \overline{b}(s)|\xi|^p\right]$$

dove $\overline{\theta}(x) = \theta(x)\psi'(\rho(s))$ e $\overline{b}(s) = b(s) + |\beta\psi'(\rho(s)) - g(\rho(s))|$;

3. $\overline{H}(x,s,\xi) \geq$

$$\alpha|\xi|^p + \psi'(\rho(s))^{p-1} g(\rho(s)) \left| \frac{\xi}{\psi'(\rho(s))} \right|^p - \frac{g(\rho(s))}{\psi'(\rho(s))}|\xi|^p = \alpha|\xi|^p\,.$$

Si consideri ora la successione di funzioni u_n soluzione del problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,u_n(x),\nabla u_n(x))) + H(x,u_n(x),\nabla u_n(x)) = f_n & \text{in}\,\Omega \\ u = 0 & \text{su}\,\partial\Omega; \end{cases} \tag{4.52}$$

e si operi il cambio di variabili $v_n = \psi(u_n)$. Essendo $\psi(s)$ una funzione $C^1(\mathbf{R}^+)$, si ha che $v_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ come conseguenza del fatto che $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Inoltre $\nabla v_n = \psi'(u_n)\nabla u_n$, cioè $\frac{\nabla v_n}{\psi'(\rho(v_n))} = \nabla u_n$: allora

$$\overline{a}(x,v_n,\nabla v_n) = \psi'(u_n)^{p-1} a(x,u_n,\nabla u_n)\,.$$

Consideriamo

$$-\mathrm{div}(\overline{a}(x,v_n,\nabla v_n)) = -\mathrm{div}(\psi'(u_n)^{p-1} a(x,u_n,\nabla u_n)) =$$

$$-\psi'(u_n)^{p-1}\mathrm{div}(a(x,u_n,\nabla u_n)) - (p-2)\psi'(u_n)^{p-2}\psi''(u_n) a(x,u_n,\nabla u_n)) \cdot \nabla u_n$$

ricordando ora che $\psi(s)$ risolve l'equazione differenziale (4.51) e sostituendo quindi a $\psi''(s)$ il suo valore, e sapendo che

$$-\mathrm{div}(a(x, u_n, \nabla u_n)) = f_n - H(x, u_n, \nabla u_n)\,,$$

si ottiene:

$$\overline{a}(x, u_n, \nabla u_n) = \psi'(u_n)^{p-1}[f_n - H(x, u_n, \nabla u_n)] - \psi'(u_n)^p a(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla u_n +$$

$$\frac{\psi'(u_n)^{p-1} g(u_n)}{\beta} a(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla u_n =$$

$$f_n \psi'(u_n)^{p-1} - a(x, v_n, \nabla v_n) \cdot \nabla v_n \left[1 - \frac{g(u_n)}{\beta \psi'(u_n)}\right]$$

$$-\psi'(u_n)^{p-1} H(x, v_n, \nabla v_n)\,.$$

Usando ora la definizione di $\overline{H}(x, u_n, \nabla u_n)$ si ottiene

$$-\mathrm{div}(\overline{a}(x, v_n, \nabla v_n)) = f_n \psi'(u_n)^{p-1} - H(x, v_n, \nabla v_n).$$

Avendo già fatto vedere che per $\overline{a}(x, s, \xi)$ e $\overline{H}(x, s, \xi)$ valgono rispettivamente le (4.3), (4.4), (4.5) e (4.6), (4.7), (4.8) con $g(s) \equiv \alpha$, la $g(s)$ verifica tutte le ipotesi del Teorema 4.2, con dato $f_n \psi'(u_n)^{p-1}$. Per poter applicare il Teorema 4.2, dobbiamo sapere che la successione di dati $f_n \psi'(u_n)^{p-1}$ soddisfa l'ipotesi (4.2). Iniziamo con l'osservare che

$$\psi'(s) = (p-1) \frac{e^{\frac{-G(s)}{\beta(p-1)}}}{\displaystyle\int_s^{+\infty} e^{\frac{-G(t)}{\beta(p-1)}} ds} \leq (p-1) \frac{e^{\frac{-G(s)}{\beta(p-1)}}}{e^{\frac{-G(s+1)}{\beta(p-1)}}}\,,$$

e dato che

$$|G(s+1) - G(s)| = \left| \int_{s+1}^{+\infty} g(t) dt - \int_s^{+\infty} g(t) dt \right| =$$

$$\left| \int_s^{s+1} g(t) dt \right| \leq \|g(s)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^+)}\,,$$

si ottiene

$$\psi'(s) \leq (p-1) e^{\frac{\|g(s)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^+)}}{\beta(p-1)}} \leq C\,.$$

Pertanto, se $I(K)$ è un qualsiasi intorno di K, si ha

$$\int_{\Omega\setminus I(K)} |f_n\,\psi'(\rho(v_n))|\,dx \le C\int_{\Omega\setminus I(K)} |f_n|\,dx \le c(I(K))\,,$$

e quindi $f_n\,\psi'(\rho(v_n))$ è limitata in $L^1(\Omega\setminus K)$. Per l'Osservazione 4.4, si possono applicare i passi 1, 2 e 3 della dimostrazione del Teorema 4.2, e concludere che v_n converge quasi ovunque verso una funzione v. Pertanto, poiché $\psi'(s)$ è continua e limitata e f_n compatta in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega\backslash K)$ si ha, grazie al Teorema di Lebesgue, che $f_n\psi'(\rho(v_n))^{p-1}$ converge in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega\backslash K)$ verso $f\psi'(\rho(v))^{p-1}$. Per il Teorema 4.2, v_n converge quasi ovunque verso una soluzione v in $W_0^{1,p}(\Omega)$ di

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\overline{a}(x,v,\nabla v(x))) + \overline{H}(x,v,\nabla v) = f\psi'(\rho(v))^{p-1} & \text{in}\,\Omega \\ \hfill v=0 & \text{su}\,\partial\Omega\,. \end{cases} \tag{4.53}$$

Abbiamo così dimostrato che data u_n soluzione del problema (4.52), $v_n = \psi(u_n) \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ risolve

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\overline{a}(x,v_n,\nabla v_n)) + \overline{H}(x,v_n,\nabla v_n) = f_n\psi'(\rho(v_n))^{p-1} & \text{in}\,\Omega \\ \hfill v_n=0 & \text{su}\,\partial\Omega\,. \end{cases}$$

Inoltre sappiamo anche che v_n converge quasi ovunque verso v soluzione di

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\overline{a}(x,v,\nabla v)) + \overline{H}(x,v,\nabla v) = f\psi'(\rho(v))^{p-1} & \text{in}\,\Omega \\ \hfill v=0 & \text{su}\,\partial\Omega\,. \end{cases}$$

Vogliamo spostare queste informazioni su u_n e u per arrivare alla tesi del Teorema. Se chiamiamo $u=\rho(v)$, dalla continutà di $\psi(s)$, $\psi'(s)$ e $\rho(s)$ stessa si ha che u_n converge quasi ovunque verso u. Sappiamo anche, poiché anche $\rho''(s)$ è continua, che

$$|\nabla T_k(u)| = |\nabla v|\rho'(v)\chi_{\{0\le\rho(v)\le k\}} \le |\nabla v| \sup_{s\in[0,\psi(k)]}\rho'(s)\,,$$

ed essendo $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$, anche $T_k(u)$ vi appartiene. Inoltre

$$(\psi(\rho(s)))' = \psi'(\rho(s))\cdot\rho'(s) = 1$$

dunque, dalla definizione di gradiente data precedentemente,

$$\nabla u = \rho'(v)\nabla v = \frac{\nabla v}{\psi'(\rho(v))}\,.$$

Considerando ora la succesione di funzioni $w_\varepsilon = \frac{\eta}{\psi'(\rho(v))^{p-1}+\varepsilon}$, con $\eta \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, come funzione test in (4.53) si vede che per ε che tende a zero $u = \rho(v)$ è soluzione (debole) del problema (4.13). Inoltre si riesce a mostrare, con una tecnica simile a quella usata nel Passo 5 della dimostrazione del teorema precedente, (si prenda ancora w_ε come funzione test, con $\eta = T_1(v)$ per la stima dove $0 \le v \le 1$ e si usi la (4.7) per la stima dove $v \ge 1$) che $H(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega)$.
Con la scelta $\eta = T_k(u)$ si ottiene invece un controllo sul gradiente delle troncate, cioè :

$$\alpha\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p \le k\|f\|_{L^1(\Omega)}\,,$$

che implica (si veda [1]), come volevamo, che

$$|\nabla u|^{p-1} \in L^q(\Omega) \qquad \forall q < \frac{N}{N-1}\,,$$

e dunque anche $a(x,s,\xi)$ verifica le stesse proprietà. Si riesce, a questo punto, a provare che u è la soluzione cercata del problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,u(x),\nabla u(x))) + H(x,u(x),\nabla u(x)) = f & \text{in}\,\Omega \\ \hfill u = 0 & \text{su}\,\partial\Omega. \end{cases}$$

Per maggiori dettagli si veda [11], Teorema 1.5, Passi da 3 a 7. ■

4.3 Alcuni esempi e controesempi

Esempio 4.8 Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u)) + H(x,u,\nabla u) = 0 & \text{in}\,\Omega \\ \hfill u = 0 & \text{su}\,\partial\Omega\,. \end{cases}$$

Si ha, supponendo che la soluzione sia $W_0^{1,p}(\Omega)$, prendendo come funzione test u^+:

$$0 = \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla u^+ + \int_\Omega H(x,u,\nabla u)u^+ \ge \alpha\|u^+\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}\,,$$

ricordando che $H(x,s,\xi)s^+ \geq 0$, implica $u^+ = 0$. Considerando ora u^- come funzione test si ottiene, moltiplicando e integrando su Ω:

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla u^- + \int_\Omega H(x,u,\nabla u)u^- = 0$$

e dunque portando il primo integrale al secondo membro e osservando che $H(x,s,\xi)s^- \leq 0$ grazie alla (4.6), si ha

$$0 \geq \alpha \|u^-\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}\,.$$

Dunque anche $u^- = 0$ e si può così concludere che

$$u \equiv 0$$

è **la** soluzione del problema.

Esempio 4.9 Sia $\Omega = B_1(0)$ e si prenda ora come dato la funzione

$$f_n = \chi_{B_{\frac{1}{n}}(0)} \cdot n^{n^{n^{n}}}\,.$$

Se si sceglie $K = \{0\}$ si vede che

$$f_n \to 0 \quad \text{in}\, L^1_{\text{loc}}(\Omega\backslash K)\,,$$

nel senso della (4.2), dunque se scegliamo $a(x,s,\xi)$ e $H(x,s,\xi)$ tali che verifichino rispettivamente le ipotesi (4.3), (4.4), (4.5) e (4.6), (4.7), (4.8) del Teorema 4.1, con $g(s)$ come in (4.9), (4.10) e (4.14), la successione u_n di soluzioni del problema

$$\begin{cases} -\text{div}(a(x,u_n,\nabla u_n) + H(x,u_n,\nabla u_n) = f_n & \text{in}\,\Omega \\ \hfill u_n = 0 & \text{su}\,\partial\Omega\,, \end{cases}$$

converge quasi ovunque verso la soluzione di

$$\begin{cases} -\text{div}(a(x,u,\nabla u) + H(x,u,\nabla u) = 0 & \text{in}\,\Omega \\ \hfill u = 0 & \text{su}\,\partial\Omega\,, \end{cases}$$

che abbiamo visto nel precedente esempio essere

$$u \equiv 0\,.$$

Osservazione 4.10 *Se si considera l'esempio precedente con* $a(x,s,\xi) = \xi$ *e* $H(x,s,\xi) = 0$*, la soluzione* v_n *di*

$$\begin{cases} -\triangle v_n = f_n & in\,\Omega \\ v_n = 0 & su\,\partial\Omega\,, \end{cases} \tag{4.54}$$

è tale che $v_n \to +\infty$ *ovunque.*
Anche in questo caso si può notare l'effetto regolarizzante del termine di ordine inferiore a crescita naturale nel gradiente.

Diamo ora un esempio di problema in cui sceglieremo $H(x,s,\xi)$ della forma $H(x,s,\xi) = g(s)|\xi|^p$ tale che $g(s)$ non soddisfi la proprietà (4.11) del Teorema 4.1: in questo caso vedremo che non esiste soluzione per il problema:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u)|\nabla u|^p = f & \text{in}\,\Omega \\ u = 0 & \text{su}\,\partial\Omega\,. \end{cases}$$

Esempio 4.11 Sia $\Omega = B_1(0) = \{x \in \mathbf{R}^N : |x| \le 1\}$, sia $\alpha > N \ge 2$ e sia

$$f_n = \begin{cases} n^\alpha & \text{se} \;\; 0 \le |x| \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se} \;\; \frac{1}{n} \le |x| \le 1\,. \end{cases}$$

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n) = f_n & \text{in}\,\Omega \\ v_n = 0 & \text{su}\,\partial\Omega\,. \end{cases} \tag{4.55}$$

Ricordiamo che $\mathrm{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) = \triangle_p v$ ed inoltre f_n è una funzione radiale: grazie al Teorema dimostrato da Gidas, Ni e Nirenberg in [7], la soluzione cercata è anch'essa radiale, decrescente e con derivata prima nulla nell'origine.
Si noti che per $p = 2$, $N = 1$ e $\Omega = [-1,1]$ stiamo trattando il problema

$$\begin{cases} -v_n'' = & f_n & \text{in}\,[-1,1] \\ v(-1) = v(1) = & 0\,. \end{cases}$$

che ha soluzione

$$v = \begin{cases} -\frac{n^\alpha}{2}x^2 - \frac{n^{\alpha-2}}{2} - n^{\alpha-1} & \text{se} \;\; 0 \le |x| \le \frac{1}{n} \\ -n^{\alpha-1}x + n^{\alpha-1} & \text{se} \;\; \frac{1}{n} \le |x| \le 1\,. \end{cases}$$

In generale, ricordando l'espressione del p-laplaciano in cordinate sferiche in dimensione N per funzioni radiali

$$\triangle_p u(\rho) = \frac{1}{\rho^{N-1}} \left(\rho^{N-1}|u'(\rho)|^{p-2}u'(\rho)\right)'$$

è sufficiente risolvere l'equazione differenziale ordinaria

$$\left(\rho^{N-1}u'(\rho)\right)' = \begin{cases} \rho^{N-1}n^{\alpha} & \text{se} \quad 0 \le \rho \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se} \quad \frac{1}{n} \le \rho \le 1 \end{cases}$$

con le condizioni

$$\begin{cases} u(1) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases} .$$

Si trova così la soluzione cercata

$$v_n(\rho) = \begin{cases} -\frac{p-1}{pN^{\frac{1}{p-1}}}\rho^{\frac{p}{p-1}}n^{\frac{\alpha-N}{p-1}} + a_n & \text{se} \quad 0 \le \rho \le \frac{1}{n} \\ \frac{p-1}{(N-p)N^{\frac{1}{p-1}}}n^{\frac{\alpha-N}{p-1}}\left(\rho^{\frac{p-N}{p-1}} - 1\right) & \text{se} \quad \frac{1}{n} \le \rho \le 1\,, \end{cases}$$

dove la successione a_n è data imponendo alla funzione $v_n(\rho)$ le condizioni di continuità nei punti dove $\rho = \frac{1}{n}$ ed è tale che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty\,.$$

Allora si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} v_n(\rho) = +\infty \quad \forall \rho \in [0,1)\,.$$

Si consideri ora il seguente cambio di variabili

$$v_n(\rho) = \int_0^{u_n(\rho)} e^{\frac{-G(t)}{p-1}}dt \quad \text{dove} \quad G(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau\,,$$

cioè lo stesso usato nella dimostrazione del Teorema 4.1, essendo $\beta = 1$ in quanto l'operatore considerato è il p-laplaciano. Si osservi che abbiamo dato una definizione di u_n ben posta poiché $e^{\frac{-G(t)}{p-1}} \notin L^1(\Omega)$. Poiché v_n è soluzione del problema (4.55), ed essendo

$$\nabla v_n = e^{\frac{-G(u_n)}{p-1}}\nabla u_n$$

si ha

$$\operatorname{div}\left(\left|e^{\frac{-G(u_n)}{p-1}}\nabla u_n\right|^{p-2} e^{\frac{-G(u_n)}{p-1}}\nabla u_n\right)$$

$$= -g(u_n)e^{-G(u_n)}\nabla u_n|\nabla u_n|^{p-1} + e^{-G(u_n)}\operatorname{div}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n =$$

$$g(u_n)e^{-G(u_n)}\nabla u_n|\nabla u_n|^{p-1} + \triangle_p u_n\,.$$

Allora u_n è soluzione di

$$\begin{cases} -\triangle_p u_n + g(u_n)|\nabla u_n|^p = & f_n e^{G(u_n)} \quad \text{in}\, \Omega \\ u_n = & 0 \quad \text{su} \quad \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Si osservi che, poiché $\text{supp}(f_n) \subset B_{\frac{1}{n}}(0)$, anche il dato $f_n e^{G(u_n)}$ ha il supporto contenuto in $B_{\frac{1}{n}}(0)$ ed inoltre converge verso la funzione identicamente nulla in $L^1_{\text{loc}}(\Omega\backslash K)$. Se si potesse applicare il Teorema 4.1 la successione $u_n$dovrebbe convergere verso la soluzione del problema con dato nullo, cioè, come abbiamo fatto vedere nel primo esempio, $u \equiv 0$. Ma dall'osservazione fatta precedentemente sappiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} v_n(\rho) = +\infty \quad \forall \rho \in [0,1)\,,$$

che implica anche

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(\rho) = +\infty$$

per ogni $\rho \in [0,1)$.

Esempio 4.12 Abbiamo visto nello scorso capitolo quali sono le ipotesi necessarie affinché una singolarità sia eliminabile: se consideriamo ora il problema

$$-\triangle u + g(u)|\nabla u|^2 = f(x) \quad \text{in}\ \Omega\backslash K\ ,$$

dove u è una soluzione regolare su $\Omega\backslash K$, $f \in L^\infty(\Omega)$ e $g(x) \in C^0(\Omega)$ con $g(s)s \geq \gamma > 1$, allora una versione più debole del Teorema 3.6 ci assicura che u è regolare su tutto Ω. Se consideriamo allora la funzione

$$g(s) = \frac{\gamma}{e+s}\left[1 + \frac{2}{\log(e+s)}\right]\,,$$

$g(s)$ soddisfa le ipotesi del Teorema 3.6 debole quando $\gamma > 1$.
Si osservi però che, se si prende $g(s) \equiv h(s)$ nella (4.8), e $\gamma = 1$ nella definizione di $g(s)$ si vede che $g(s)$ è continua, positiva, limitata ed inoltre

$$e^{\frac{-G(s)}{\beta(p-1)}} = \frac{1}{(e+s)\log^2(e+s)} \in L^1(\mathbf{R}) .$$

Allora al problema

$$\begin{cases} -\triangle u_n + g(u_n)|\nabla u_n|^2 = & f_n \quad \text{in } \Omega \backslash K \ , \\ u_n = & 0 \quad \text{su } \partial\Omega \, . \end{cases}$$

si può applicare il Teorema 4.1, dunque u è soluzione su tutto Ω.
Abbiamo quindi mostrato che sotto le ipotesi del Teorema 4.1 rientrano funzioni che hanno un decadimento all'infinito più lento rispetto a quelle del Teorema 3.6 del capitolo precedente.

Bibliografia

[1] Bénilan P., Boccardo L., Gallouët T., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J. L., An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, **22** (1995), 241–273.

[2] Boccardo L. ,Giachetti D. , Alcune osservazioni sulla regolarità delle soluzioni di problemi fortemente non lineari e applicazioni, *Ricerche Mat.*, **34** (1985), 309–323.

[3] Boccardo L., Gallouët T., Orsina L., Existence and nonexistence of solutions for some nonlinear elliptic equations , *J. d'Analyse Mathématique*, **73** (1997), 203–223.

[4] Boccardo L., Gallouët T., Orsina L., Existence and uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic equations with measure data, *Ann. Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire*, **13** (1996), 539–551.

[5] Brezis, *Analisi Funzionale*, Ed. Italiana, Liguori, Napoli, 1986.

[6] Brezis H., Nirenberg L., Removable singularities for nonlinear elliptic equation, *Topol. Methods in Nonlin. Anal.*, **9** (1997), 201–219.

[7] Gidas , Ni W., Nirenberg L., Symmetry and related propries via the maximum principle, *Comm. math. phys.*, **68**, (1979), n 3, 209–243

[8] Heinomen J., Kilpelainen, Martio O., *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equation*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

[9] Leray J., Lions J.L., Quelque resultat de Višik sur les problémes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder, *Bull. Soc. Math. France*, **93** (1965), 97–107.

[10] Porretta A., Murat F., Stability properties, existence and nonexistence of renormalized solutions for elliptic equations with measure data, *Comm. Partial Differential Equations*, to appear

[11] Orsina L., Porretta A., Strong stability results for nonlinear elliptic equations with respect to very singular perturbation of the data, *Commun. Cont. Math.*, **3** (2001), pag 259–285.

[12] Royden, *Real Analysis*, Macmillan Publishing Company, 1988.

[13] Rudin W., *Analisi Reale e Complessa*, McGraw-Hill,N ew York, 1966.

[14] Vazquez J.L., A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations, *Appl. Math. Optim.*, **12** (1984), 191–202.